NOM-Prénom : . . . .   PO-Groupe : . . . . . .

Examen Final CC2 (2h30)
Cours Ondes et Propagation, MIC 2^{nde} année

Mercredi 31 mai 2017 - 2h30
(Seuls le formulaire et la calculatrice sont autorisés)
Le barême est susceptible d'être modifié. Soulignez les résultats.

Comportement d'une OPPM en présence d'un milieu diélectrique (/ 10 pts)

Première partie : Propagation dans un diélectrique avec pertes (/ 6 points)

Soit un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope. Ce milieu est électriquement neutre ($\rho_{libre} = 0$), de conductivité nulle ($\sigma = 0$) et non magnétique ($\mu = \mu_0$). La polarisation diélectrique $\vec{P}$ présente un retard par rapport à l'excitation électrique $\vec{E}$, ce qui conduit à une permittivité complexe $\underline{\epsilon} = \epsilon_0\epsilon_r \mathrm{e}^{i\theta}$, où l'angle θ, appelé angle de pertes du diélectrique exprimé en radian, est très petit devant 1. Le champ électrique de l'OPPM pénétrant dans le diélectrique a pour forme générale :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \, \mathrm{e}^{i(\underline{k}z-\omega t)} \, \vec{e}_x$$

1. A partir de l'équation de dispersion généralisée, écrire celle du diélectrique en fonction de c, ω, ϵ_r et θ.

$$\boxed{\underline{k}^2 = \mu_0 \underline{\varepsilon}\, \omega^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r e^{i\theta} \omega^2 = \varepsilon_r . e^{i\theta} . \frac{\omega^2}{c^2}}$$

2. Ecrire alors $\underline{k}$ sous la forme $\underline{k} = |k|\mathrm{e}^{i\alpha}$, avec $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Donc $\boxed{\underline{k} = \sqrt{\varepsilon_r} . \frac{\omega}{c} \, e^{i\theta/2}}$ et $\alpha = \frac{\theta}{2}$

3. En déduire $\underline{k}$ sous la forme $\underline{k} = k' + ik''$ avec k' et k'' réels et $k' > 0$. Donner une expression approchée de $\underline{k}$ en utilisant un développement limité du premier ordre en θ et en négligeant le reste. *On utilisera cette expression pour la suite.*

$$\underline{k} = \sqrt{\varepsilon_r} . \frac{\omega}{c} \left[\cos \theta/2 + i \sin \theta/2 \right]$$

Comme $\theta \ll 1$, $\cos \theta/2 \simeq 1$
(D.L. 1) $\sin \theta/2 \simeq \theta/2$

$\Rightarrow \boxed{\underline{k} = \sqrt{\varepsilon_r} . \frac{\omega}{c} \left(1 + i \frac{\theta}{2}\right)}$

4. Donner, en fonction de c, ω, ϵ_r et θ, la représentation complexe du champ électrique présent dans le diélectrique, puis son expression réelle. Préciser la nature de l'onde.

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 . e^{-\sqrt{\varepsilon_r}.\frac{\omega}{c}.\frac{\theta}{2}.z} . e^{i\left[\sqrt{\varepsilon_r}.\frac{\omega}{c}.z - \omega t\right]} . \vec{e}_x$$

$$\vec{E} = E_0 . e^{-\sqrt{\varepsilon_r}.\frac{\omega}{c}\frac{\theta}{2}z} . \cos\left(\sqrt{\varepsilon_r}.\frac{\omega}{c}.z - \omega t\right) . \vec{e}_x$$

Onde progressive atténuée

5. Déterminer la vitesse de phase v_φ. Y a-t-il, et si oui lequel, un effet de la polarisation sur v_φ ?

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

La polarisation ralentit la propagation avec $\sqrt{\varepsilon_r}$. Il n'y a par contre pas d'influence du retard à la polarisation (θ).

6. Définir pour ce diélectrique ce que l'on peut appeler la profondeur de pénétration δ de l'onde et donner son expression. Application numérique : calculer δ pour $\omega = 10^8$ rad.s^{-1}, $\epsilon_r = 1,5$ et $\theta = 0,1$ rad. Commenter.

La profondeur de pénétration δ caractérise l'atténuation due à l'exponentielle décroissante... donc

$$\boxed{\delta = \frac{2.c}{\sqrt{\varepsilon_r}.\omega.\theta}}$$

AN : $\delta = \dfrac{2 \times 3.10^8}{\sqrt{1,5} \times 10^8 \times 0,1} = \dfrac{60}{\sqrt{1,5}} = 48,98$ m $\simeq 49$ m.

7. A partir de la relation $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$, déterminer l'expression du champ magnétique en notation réelle.

$$\underline{\vec{B}} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\underline{E}_0}{\omega} . e^{-z/\delta} . \left[\sqrt{\varepsilon_r}.\frac{\omega}{c}\left(1 + i\frac{\theta}{2}\right)\right] . e^{i\left(\sqrt{\varepsilon_r}.\frac{\omega}{c}z - \omega t\right)} . \vec{e}_y$$

D'où
$$\vec{B} = \sqrt{\varepsilon_r}.\frac{E_0}{c}.e^{-z/\delta}.\left[\cos\left(\sqrt{\varepsilon_r}.\frac{\omega}{c}z - \omega t\right) - \frac{\theta}{2}.\sin\left(\sqrt{\varepsilon_r}.\frac{\omega}{c}z - \omega t\right)\right]\vec{e}_y$$

Seconde partie : Etude de la réflection/réfraction à l'interface entre deux diélectriques (/ 4 pts)

Ces questions sont indépendantes de la première partie.

On considère maintenant l'interface entre deux milieux diélectriques caractérisés par ϵ_{r1} et ϵ_{r2}, le premier étant sans pertes ($\theta_1 = 0$) et le second avec pertes (caractérisée par θ_2). Leurs autres propriétés sont identiques à celles du diélectrique étudié dans la première partie. L'OPPM en incidence normale se propageant du milieu 1 vers le milieu 2 est caractérisée par un champ électrique $\underline{\vec{E}}_i$ de formule :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 \, \mathrm{e}^{i(k_1 z - \omega t)} \, \vec{e}_x.$$

Elle engendre une onde réfléchie que l'on notera : $\underline{\vec{E}}_r = \underline{r} \, E_0 \, \mathrm{e}^{-i(k_1 z + \omega t)} \, \vec{e}_x$, ainsi qu'une onde transmise de la forme : $\underline{\vec{E}}_t = \underline{t} \, E_0 \, \mathrm{e}^{i(\underline{k}_2 z - \omega t)} \, \vec{e}_x$, avec $\underline{k}_2$, $\underline{r}$ et $\underline{t}$ complexes.

1. Donner les indices n_1 et $\underline{n}_2$ des milieux en fonction de k_1 et $\underline{k}_2$.

2. Calculer $\underline{\vec{B}}_i$, $\underline{\vec{B}}_r$, et $\underline{\vec{B}}_t$, en faisant bien apparaître n_1, $\underline{n}_2$, c, $\underline{r}$ et $\underline{t}$ dans leurs expressions.

3. A partir des relations de continuités à l'interface, sachant qu'il n'y a pas de courant surfacique, montrer que :

$$\underline{r} = \frac{n_1 - \underline{n}_2}{n_1 + \underline{n}_2} \qquad \text{et} \qquad \underline{t} = \frac{2 \, n_1}{n_1 + \underline{n}_2}.$$

Propagation guidée entre deux plans conducteurs (/ 10 pts)

Une onde électromagnétique monochromatique se propage dans le vide suivant (Oz) entre deux plaques métalliques parfaitement conductrices, occupant les plans $y = 0$ et $y = b$. Les composantes de l'onde, selon les axes du référentiel $Oxyz$ sont :

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(kz - \omega t\right) \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{B} \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \frac{kE_0}{\omega} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(kz - \omega t\right) \\ B_z = -\frac{\pi}{b}\frac{E_0}{\omega} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(kz - \omega t\right) \end{cases}$$

1. Comment s'expriment les deux conditions de continuité à l'interface vide/métal parfait que doivent vérifier les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ de l'onde pour qu'il y ait propagation.

2. Ces conditions sont-elles vérifiées ici ? Justifier.

3. En justifiant votre réponse, indiquez le mode de propagation de cette onde. Indiquez aussi quel est le plan d'incidence de l'onde.

4. Cette onde se déplaçant dans le vide situé entre les deux plaques, retrouver l'équation de propagation du champ électrique dans ce milieu à partir des équations de Maxwell.

5. A partir de cette équation et en gardant la forme réelle de $\vec{E}(M,t)$, établir l'équation de dispersion $k^2\left(\omega\right)$ de l'onde et montrer que k peut se mettre sous la forme :

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-A^2}, \text{ où } A \text{ s'exprime en fonction de } b,\ c,\ \omega \text{ et d'une constante.}$$

6. En déduire l'expression de la fréquence de coupure f_c et indiquer pour quelle gamme de fréquences il y a propagation de l'onde.

7. Donner la condition sur λ pour qu'il n'y ait pas de propagation possible du mode supérieur.

8. Lorsqu'il y a propagation, donner les expressions de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g de l'onde en fonction de b, c et ω.

9. Représenter, en la justifiant, l'allure de la courbe de dispersion $\omega = f(k)$ de ce guide d'onde.