NOM-Prénom : . . . .   PO-Groupe : . . . . . .

Examen de Session 2 (2h)
Cours Ondes et Propagation, MIC 2$^{\text{nde}}$ année

Mercredi 26 Juin 2019

(Seuls le formulaire et la calculatrice non programmable sont autorisés)

Le barême est susceptible d'être modifié.

Propagation dans un milieu interstellaire (/ 14 pts)

Nous allons étudier les caractéristiques d'une onde électromagnétique plane, sinusoïdale, polarisée rectilignement $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp\left[i(\underline{\vec{k}}.\vec{r} - \omega t)\right]$ qui se propage dans un plasma interstellaire composé d'ions (masse M) et d'électrons (masse m), de charge respective $+e$ et $-e$. Ce milieu est considéré comme un plasma froid avec des densités en particules telles que $n_e = n_i = n$. On néglige donc les interactions entre particules, ainsi que la polarisation du milieu au passage de l'onde. Dans ces conditions, les mouvements des particules (non relativistes) ne sont déterminés que par leur inertie et par l'action du champ électrique de l'onde é.m. se propageant dans le plasma, le poids des particules étant négligeable.

1. A partir d'une équation de Maxwell bien choisie et en utilisant la notation complexe, établissez le lien qui existe entre les champs $\underline{\vec{B}}$ et $\underline{\vec{E}}$ de cette onde plane. Quelle est la structure du trièdre $\{\underline{\vec{k}}, \underline{\vec{E}}, \underline{\vec{B}}\}$?

$$\vec{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \iff i\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = -(-i\omega)\underline{\vec{B}}$$

$$\iff \boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}}$$

2. Ecrire l'équation de dispersion généralisée pour ce milieu en fonction des données de l'énoncé. Quelle grandeur nous manque pour déterminer $\vec{k}$?

$$\left.\begin{matrix} \mu = \mu_0 \\ \underline{\varepsilon} \simeq \varepsilon_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\underline{k}^2 = \mu_0\left(\varepsilon_0 + \frac{i\underline{\sigma}}{\omega}\right)\omega^2}$$

Il faut déterminer $\underline{\sigma}$.

3. Quelle force caractérise l'interaction de l'onde avec le milieu traversé. Montrer comment son expression peut se simplifier grâce à une information de l'énoncé.

La force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_q \wedge \vec{B})$

Comme $\|\vec{v}_q\| \ll c$, on peut négliger $\|\vec{v}_q \wedge \vec{B}\|$ devant $\|\vec{E}\|$ car $\|\vec{B}\| \approx \frac{\|\vec{E}\|}{c}$.

D'où $\vec{F} \simeq q.\vec{E}$

4. A partir de l'équation du mouvement d'un ion (puis d'un électron) soumis à l'action de l'onde, montrer que la densité de courant ionique $\underline{\vec{j}}_i$ (puis électronique $\underline{\vec{j}}_e$) peut se mettre sous la forme $\underline{\vec{j}}_i = i\frac{\alpha_i}{\omega}\underline{\vec{E}}$ avec α_i une constante fonction des propriétés des ions (idem pour $\underline{\vec{j}}_e$ avec α_e). *Une démonstration détaillée et rigoureuse est demandée.*

PFD pour un ion :

$$M.\vec{a}_i = e.\vec{E}$$

$$M.\dot{\vec{v}}_i = e.\vec{E}$$

On est en régime sinusoïdal forcé (RSF) donc on peut travailler en not. cplx :

$$M.(-i\omega)\underline{\vec{v}_i} = e.\underline{\vec{E}}$$

soit $\underline{\vec{v}_i} = i\frac{e/M}{\omega}.\underline{\vec{E}}$

Ainsi $\underline{\vec{j}_i} = n_i.e.\underline{\vec{v}_i} = i\frac{n_i e^2/M}{\omega}.\underline{\vec{E}}$

et $\alpha_i = \frac{n_i e^2}{M}$.

De même pour les électrons, on a :

$$\underline{\vec{j}_e} = i\frac{n_e e^2/m}{\omega}.\underline{\vec{E}}$$

et $\alpha_e = \frac{n_e e^2}{m}$

5. En déduire la conductivité σ du milieu. Puis établir l'équation de dispersion du plasma en fonction de c, ω et ω_c. On pose $\Omega_p^2 = \frac{n_i e^2}{\epsilon_0 M}$, $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}$ et $\omega_c^2 = \omega_p^2 + \Omega_p^2$.

$\underline{\vec{j}} = \underline{\vec{j}_i} + \underline{\vec{j}_e} = i.\frac{\alpha_i+\alpha_e}{\omega}.\underline{\vec{E}}$. Par identification : $\boxed{\underline{\sigma} = i.\frac{\alpha_i+\alpha_e}{\omega}}$

D'où $k^2 = \left[1 + \frac{i\underline{\sigma}}{\epsilon_0\omega}\right]\frac{\omega^2}{c} = \left[1 - \frac{\alpha_i+\alpha_e}{\epsilon_0.\omega^2}\right]\frac{\omega^2}{c^2} = \left[1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right].\frac{\omega^2}{c^2}$

et $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}}$

6. Déterminer le domaine de pulsation pour lequel l'onde est évanescente et celui pour lequel l'onde est progressive. Tracer la courbe de dispersion $\omega(k)$ en la justifiant.

k^2 réel >0 si $\omega > \omega_c$ ⇒ onde progressive

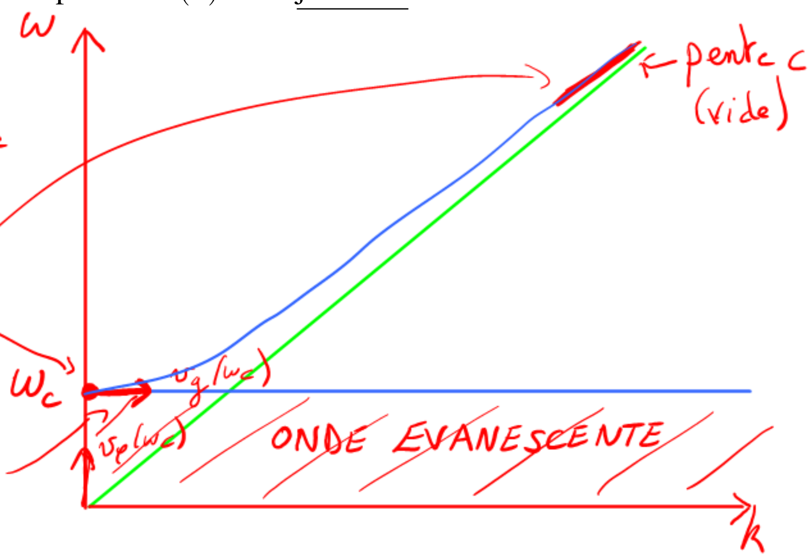
k^2 réel <0 si $\omega < \omega_c$ ⇒ onde évanescente

Si $\omega = \omega_c$, $k = 0$

Si $\omega \to +\infty$, $k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$ (comportement du vide)

En $\omega = \omega_c$, $v_\varphi \to +\infty$ donc $v_g \to 0$

Asymptote horizontale.



7. Exprimer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g de l'onde progressive en fonction de c et des pulsations caractéristiques du plasma.

Si $\omega > \omega_c$: • $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$

• $d(k^2) = d\left(\dfrac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2}\right)$ $\iff v_g \cdot v_\varphi = c^2$

$\iff 2k\,dk = \dfrac{2\omega\, d\omega}{c^2}$ d'où $\boxed{v_g = c\sqrt{1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$

8. Exprimer l'indice de réfraction n_{opt} du milieu et représenter sa variation $n_{opt}(\omega)$. Justifier par le calcul les valeurs des pentes aux points remarquables de la courbe.

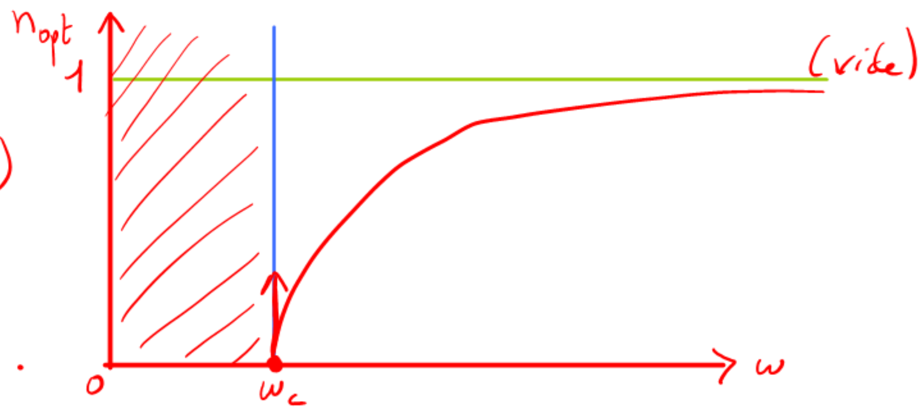
Si $\omega > \omega_c$, $n_{opt} = \dfrac{c}{v_\varphi} = \sqrt{1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}} < 1$

Si $\omega = \omega_c$, $n_{opt} = 0$

Si $\omega \to +\infty$, $n_{opt} \to 1$ (vide)

$n'_{opt} = \dfrac{1}{\omega^3\sqrt{1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}} \xrightarrow[\omega\to\omega_c]{} +\infty$

donc asymptote verticale en ω_c.



9. L'onde se propage dans la direction des z croissants. Ecrire le champ électrique <u>en notation réelle</u> dans chacun des domaines de fréquences déterminés à la question 6.

Si $\omega < \omega_c$, $\underline{k} = i\sqrt{\dfrac{\omega_c^2-\omega^2}{c^2}} = ik''$ avec $k''>0$ et $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k''z} \cdot \cos(\omega t)$

Si $\omega > \omega_c$, $k = \sqrt{\dfrac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2}} = k'$ avec $k'>0$ et $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(k'z - \omega t)$

10. Dans le domaine des ondes évanescentes, donner l'expression de la grandeur qui caractérise l'atténuation de l'amplitude de l'onde, que l'on notera δ. Etablir le lien entre la partie imaginaire de l'indice complexe n'' et δ.

Ici, $\delta = \dfrac{1}{k''} = \dfrac{c}{\sqrt{\omega_c^2-\omega^2}}$

Comme $\underline{n} = \dfrac{c.\underline{k}}{\omega}$, $n'' = \dfrac{c.k''}{\omega}$ et $\boxed{\delta = \dfrac{c}{n''.\omega}}$

11. Dans le domaine des ondes progressives et pour une onde plane polarisée rectilignement selon l'axe (Ox), calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde en fonction de E_0, ω, v_φ et μ_0. Donner ensuite sa valeur moyenne temporelle.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})}{\mu_0 . \omega} = \frac{k}{\mu_0 \omega} \left[\vec{E} \wedge (\vec{e_z} \wedge \vec{E}) \right]$$

$$= \frac{\|\vec{E}\|^2}{\mu_0 . v_\varphi} . \vec{e_z} = \frac{E_0^2}{\mu_0 v_\varphi} \cos^2(k z - \omega t) \vec{e_z}$$

$k(\omega)\ldots$

D'où $\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2 \mu_0 v_\varphi} . \vec{e_z}}$ car $\langle \cos^2(\,) \rangle = 1/2$.

12. Deux trains d'onde de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont émis au même instant par un objet stellaire situé à une distance L du récepteur (les λ sont dans le domaine correspondant à la propagation libre du milieu interstellaire décrit plus haut).

En supposant $\frac{\omega_c.\lambda_1}{c} \ll 1$ et $\frac{\omega_c.\lambda_2}{c} \ll 1$, déterminer $\Delta t = t_2 - t_1$, le retard de détection entre les 2 signaux en fonction de L, ω_c, c et les 2 longueurs d'onde. On donne $(1-u)^a \simeq 1 - a.u$ à l'ordre 1 quand $u \ll 1$.

$t_1 = \frac{L}{v_{g1}}$ et $t_2 = \frac{L}{v_{g2}}$ avec $v_g = c.\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda}$ donc $v_g = c.\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c . \lambda}{2\pi . c}\right)^2}$

D'après l'énoncé, $\frac{\omega_c \lambda}{c} \ll 1$ donc : $v_g \simeq c.\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_c \lambda}{2\pi . c}\right)^2\right]$

Ainsi $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{c}\left[\frac{1}{1 - \frac{\omega_c^2 \lambda_2^2}{8\pi^2 c^2}} - \frac{1}{1 - \frac{\omega_c^2 \lambda_1^2}{8\pi^2 c^2}}\right]$

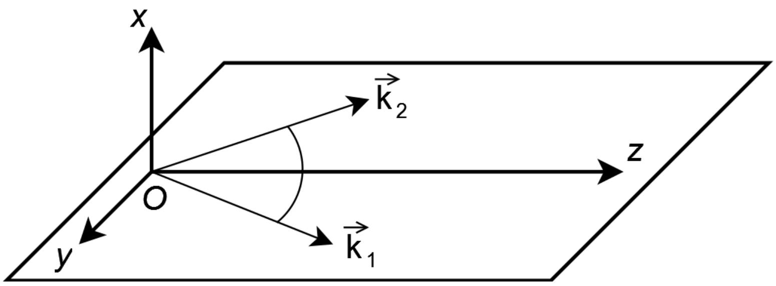
$$\boxed{\Delta t = \frac{L \omega_c^2}{8\pi^2 c^3} \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\left(1 - \frac{\omega_c^2 \lambda_2^2}{8\pi^2 c^2}\right)\left(1 - \frac{\omega_c^2 \lambda_1^2}{8\pi^2 c^2}\right)}}$$

NOM-Prénom : . . . .   PO-Groupe : . . . . . .

Superposition de 2 ondes électromagnétiques (/ 6 pts)

Deux OPPM polarisées rectilignement selon $\vec{e}_x$, se propagent dans 2 directions telles que les vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ fassent un angle θ avec l'axe (Oz) comme indiqué sur la figure. Ces deux ondes se propagent dans le vide avec une longueur d'onde λ. Au point d'origine O, elles sont en phase, si bien que :

$$\underline{\vec{E}}_1(O) = \underline{\vec{E}}_2(O) = E_0 \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \vec{e}_x$$



1. Donner, en fonction de ω, t, y, z et θ, les expressions de $\underline{\vec{E}}_1$ et $\underline{\vec{E}}_2$ en un point $M(x, y, z)$.

2. Calculer au point M le champ électrique total $\underline{\vec{E}}_T = \underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}_2$.

3. Montrer que l'expression de $\underline{\vec{E}}_T$ fait apparaître un terme de propagation (phase φ) et un terme d'amplitude modulée (A). Donner leur expression.

4. Déterminer sa vitesse de phase v_φ.

5. Déterminer son amplitude maximale A.

6. Montrer que dans un plan $z = cste$, on obtient un phénomène d'interférences, *i.e.* une alternance de franges lumineuses brillantes ($||\vec{E}_T||$ max) et noires ($||\vec{E}_T||$ nulle) selon (Oy).

7. Déterminer en fonction de λ et de θ, l'interfrange i (distance entre deux franges lumineuses brillantes - ou noires - consécutives).