NOM-Prénom : . . . . PO-Groupe : . . . . . .

Examen Final (2h30)
Cours Ondes et Propagation, MIC 2^{nde} année

Mercredi 6 Juin 2012
(Seuls le formulaire et la calculatrice sont autorisés)
Le barême est susceptible d'être modifié. Soulignez les résultats

---

Superposition de 2 ondes (/ 4 pts)

Deux ondes planes de même pulsation, polarisées rectilignement, se propagent suivant l'axe (Ox) dans le vide. Les champs électriques s'écrivent :

$$\underline{\vec{E}}_1 = E_0 \, \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} \, \vec{e}_y, \text{ et } \underline{\vec{E}}_2 = r.E_0 \, \mathrm{e}^{-i(kx+\omega t)} \, \vec{e}_y,$$

où E_0, k et r sont des réels positifs vérifiant $0 < r < 1$.

1. Exprimer les champs $\underline{\vec{E}}(M,t)$ et $\underline{\vec{B}}(M,t)$ de l'onde résultante au point $M(x,y,z)$ et à l'instant t, en notation complexe. En déduire en fonction des paramètres E_0, r, c et k, les amplitudes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en M.

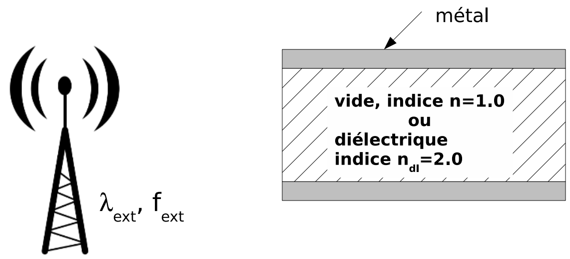
2. Exprimer le taux d'onde stationnaire, défini comme TOS $= E_{\text{max}}/E_{\text{min}}$, pour l'onde résultante en fonction de r. Commenter les valeurs du TOS quand $r \to 0$ et quand $r \to 1$.

3. Déterminer les positions des plans d'onde pour lesquelles : a) l'amplitude de $\vec{E}$ est maximale, et b) l'amplitude de $\vec{E}$ est minimale.

Guide d'ondes rectangulaire (/ 3 pts)

Un guide d'onde rectangulaire dans le vide a pour dimension $a = 2,4$ cm (// à (Ox)) et $b = 1,0$ cm (// à (Oy)). Il est excité par une antenne placée dans le vide, à l'extérieur du guide (voir schéma ci-dessous). L'antenne émet à une longueur d'onde λ_{ext} correspondant à une fréquence f_{ext}. On rappelle que le mode TE$_{m0}$ est le mode où l'onde se réfléchit sur les plans $//$ à (Ox) et TE$_{0n}$, le mode où elle se réfléchit sur le plan $//$ à (Oy). De plus, pour un mode TE$_{mn}$ l'expression de la longueur d'onde de coupure est :

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}, \text{ avec } n, m \text{ entiers.}$$



1. Trouver l'expression des longueurs d'onde de coupure pour les modes TE$_{10}$, TE$_{11}$ et TE$_{20}$.

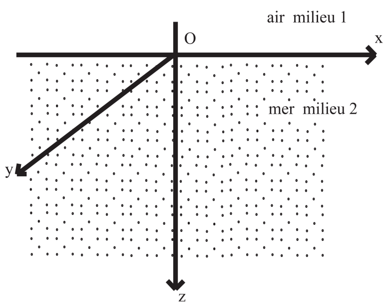
2. En déduire la bande passante pour le mode TE$_{10}$ en fonction de λ_{ext} et f_{ext}. Faire l'application numérique.

3. On remplit maintenant le guide avec un matériau diélectrique d'indice purement réel $n_{dl} = 2$, écrire la relation entre λ_{ext} et λ_{dl}.

4. Quelle est alors la nouvelle gamme de λ_{ext} à choisir pour observer une propagation en mode TE$_{10}$ seulement ? Application Numérique.

Transmission sous-marine (/ 13 pts)

Cet exercice examine la faisabilité d'une transmission sous-marine par ondes radio de fréquence maximale 10 Mhz à travers une interface air-mer. L'eau de mer sera alors considérée comme un milieu LHI de perméabilité μ_0, globalement neutre ($\rho_{\text{tot}} = 0$), mais rendu conducteur par la salinité. Pour les fréquences hertziennes, sa permittivité relative (ϵ_r), ainsi que sa conductivité électrique (σ) seront celles des régimes quasi-statiques, c'est-à-dire deux constantes réelles et positives : $\epsilon_r = 81$ et $\sigma = 4$ S.m^{-1}.



Première partie : Etude de l'indice complexe et profondeur de pénétration (5,5 points)

Considérons dans un premier temps, la propagation d'une onde plane monochromatique OPPM dans l'eau de mer.

1. Ecrire les équations de Maxwell dans l'eau de mer en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniquement, en supposant la loi d'Ohm locale valide.

2. En détaillant les principales étapes du calcul, en déduire l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$, en fonction de μ_0, c, ϵ_r et σ.

3. En supposant pour $\underline{\vec{E}}$, la forme suivante $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \, \mathrm{e}^{i\left(\underline{\vec{k}}.\vec{r}-\omega t\right)}$, donner l'équation de dispersion du milieu.

4. Montrer que l'indice optique $\underline{n}$ est défini par $\underline{n}^2 = \epsilon_r + i(\sigma/\epsilon_0\omega)$.

5. Après une évaluation numérique des deux termes précédents pour $f \leq 10$ MHz, donner une formule approchée de $\underline{n}$ en fonction de $\alpha = \sqrt{2 \, \epsilon_0 \, \omega/\sigma}$. Comment qualifier l'eau de mer, dans le domaine de fréquences étudiées ?

6. Pour une onde, se propageant dans la mer selon (Oz) dans le sens des z positifs, quelle distance parcourue conduit à une atténuation de l'amplitude de ses champs d'un facteur 100 par rapport à leur valeur initiale ? Mettre en évidence le lien avec α.

7. Application Numérique : calculer α pour $f = 10$ Mhz, et $f = 500$ khz. Commenter l'évolution en fonction de la fréquence de la profondeur de pénétration.

NOM-Prénom : . . . .   PO-Groupe : . . . . . .

Seconde partie : Facteur de transmission énergétique (7,5 points)

Les 3 premières questions de cette seconde partie sont indépendantes de la première.

Considérons une OPPM incidente polarisée rectilignement suivant l'axe (Ox), sous incidence normale (direction de propagation suivant l'axe (Oz)), traversant l'interface air-mer. Dans la suite, l'air sera considéré comme le milieu 1 d'indice optique n_1 , l'eau de mer comme le milieu 2 d'indice complexe $\underline{n}_2$. L'onde incidente est alors de la forme complexe suivante :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 \, \mathrm{e}^{i(k_1 z - \omega t)} \, \vec{e}_x,$$

elle engendre une onde réfléchie que l'on notera : $\underline{\vec{E}}_r = \underline{r} \, E_0 \, \mathrm{e}^{-i(k_1 z + \omega t)} \, \vec{e}_x$, ainsi qu'une onde transmise de la forme : $\underline{\vec{E}}_t = \underline{t} \, E_0 \, \mathrm{e}^{i(\underline{k}_2 z - \omega t)} \, \vec{e}_x$, avec $\underline{k}_2$, $\underline{r}$ et $\underline{t}$ complexes.

1. Donner les expressions de k_1 et $\underline{k}_2$, en fonction des indices des milieux.

2. Montrer que $\underline{\vec{B}}_i = n_1.\dfrac{E_0}{c}.e^{i\,(k_1 z - \omega t)}.\vec{e}_y$, que $\underline{\vec{B}}_r = -\underline{r}.n_1.\dfrac{E_0}{c}.e^{-i\,(k_1 z + \omega t)}.\vec{e}_y$ et que $\underline{\vec{B}}_t = \underline{t}.\underline{n}_2.\dfrac{E_0}{c}.e^{i\,(\underline{k}_2 z - \omega t)}.\vec{e}_y$.

3. A partir des relations de continuités à la surface de l'eau de mer, sachant qu'il n' y a pas de courant surfacique, montrer que :

$$\underline{r} = \frac{n_1 - \underline{n}_2}{n_1 + \underline{n}_2} \qquad \text{et} \qquad \underline{t} = \frac{2\,n_1}{n_1 + \underline{n}_2}.$$

4. Calculer les valeurs moyennes sur une période des vecteurs de Poynting $<\vec{\Pi}_i>$, $<\vec{\Pi}_r>$ et $<\vec{\Pi}_t>$ associée aux ondes incidente, réfléchie et transmise à partir de la formule $<\vec{\Pi}> = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*\}$, en fonction de n_1, $\underline{n}_2$, μ_0, c, E_0, $|\underline{r}|^2$ et $|\underline{t}|^2$. Ensuite grâce à la conservation du flux de l'énergie au travers de l'interface, donner les expressions des pouvoirs de réflexion (R) et de transmission (T), en fonction de n_1 et $\underline{n}_2$.

5. En prenant pour l'air un indice $n_1 = 1$, et pour $\underline{n}_2$ la formule approchée en fonction de α de la partie précédente, exprimer $T(\alpha)$. En supposant $\alpha << 1$, donner une bonne approximation de T, pour la gamme de fréquences considérées.

6. Application Numérique : calculer T pour $f = 10$ Mhz, et $f = 500$ khz. Commenter.

7. Application Pratique : en prenant un signal émis dans l'air (par un navire, par exemple) dans les conditions de l'exercice, trouver pour les deux fréquences précédentes la profondeur limite d, à laquelle un submersible peut le détecter sachant que son récepteur est sensible à un signal d'énergie 10^n fois plus faible que le celui de l'émetteur (avec $n = 10$) ? Que devient cette distance lorsque le signal est émis directement dans l'eau près de la surface ? Commenter. Quel type d'onde est utilisé par un navire pour communiquer avec un sous-marin ?