NOM-Prénom : . . . . Groupe : . . . . . .

Examen Final (2h30)
Cours Ondes et Propagation, MIC 2$^{\text{nde}}$ année

mercredi 31 mai 2011 - 2h30

(Seuls le formulaire et la calculatrice sont autorisés)

Le barème est susceptible d'être modifié. Soulignez les résultats.

Indice complexe d'une vapeur atomique (/ 10 pts)

Une onde électromagnétique interagit avec une vapeur atomique.

- L'onde est une OPPM de pulsation ω, se propageant suivant $\vec{e}_z$ et polarisée rectilignement suivant $\vec{e}_x$; en notation complexe, son champ électrique s'écrit $\underline{\vec{E}} = E_0\ \mathrm{e}^{i(\underline{k}z-\omega t)}\vec{e}_x$.
- Chaque atome de la vapeur est décrit avec le modèle suivant : les électrons de masse m et de charge $-e$ sont liés aux noyaux, supposés fixes. Si $\vec{r}_e$ représente leur écart par rapport à une situation sans champ, la force de rappel exercée par le coeur (noyau + autres électrons) sur un électron perturbé est $-m\omega_0^2\vec{r}_e$, ω_0 étant la pulsation d'absorption. L'électron est par ailleurs soumis à une force de frottement $-m\gamma\dot{\vec{r}}_e$ traduisant son rayonnement où γ est une constante. Il y a N atomes par unité de volume.

La vitesse de l'électron est suffisamment petite devant c pour négliger la force due au champ magnétique de l'onde.

1. Le milieu ne possède ni charge libre, ni courant libre et n'a pas de propriétés magnétiques. Montre, à l'aide des équation de Maxwell, que l'équation de propagation du champ électrique est la suivante, où $\vec{P}$ désigne la polarisation du milieu :

$$\triangle\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{P}\right).$$

2. Ecrire l'équation du mouvement d'un électron et en déduire le vecteur position $\underline{\vec{r}}_e$ (complexe) en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω.

3. La polarisation $\underline{\vec{P}}$ du milieu s'écrit aussi $\underline{\vec{P}} = N\underline{\vec{p}}$, sachant que le moment dipolaire sur un atome s'écrit $\vec{p} = q_e \vec{r}_e$. En déduire la permittivité diélectrique complexe $\underline{\epsilon}$ du milieu en fonction de ω, ω_0, γ et Ω avec $\Omega^2 = \dfrac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$. Montrer qu'on peut écrire $\underline{\epsilon} = \epsilon_0 \left(1 + \underline{\chi}\right)$, où $\underline{\chi}$ est la susceptibilité diélectrique complexe du milieu.

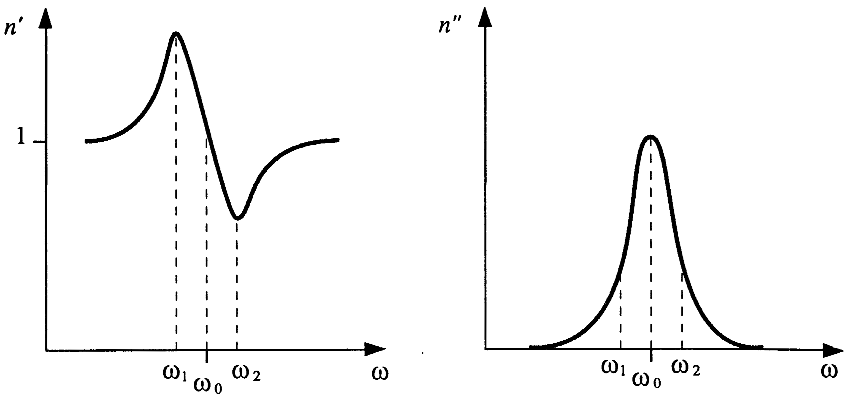
4. Déterminer l'équation de dispersion complexe $\underline{k}^2 \left(\omega\right)$ d'après l'équation de propagation obtenue à la question 1, en fonction de ω, ω_0, γ et Ω. En déduire l'expression complexe du carré de l'indice $\underline{n}^2 \left(\omega\right)$, où $\underline{n} = \dfrac{\underline{k}c}{\omega}$.

5. Le milieu étant dilué (i.e. $|\underline{\chi}| << 1$), donner les expressions approchées des parties réelle n' et imaginaire n'' de l'indice complexe, définies par $n = n' + in''$ et sachant que $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{x}{2}$ quand $x \to 0$. Commenter l'expression du champ $\underline{\vec{E}}$.

6. Donner l'expression de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $< \vec{\Pi} >$ (on rappelle que $Re\left\{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*\right\} = Re\left\{\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}}\right\}$). Déduire la distance δ sur laquelle l'intensité de l'onde est divisé par e.

AN : Calculer n', n'' et δ pour une longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0,63$ μm (rouge) sachant que $\lambda_0 = \dfrac{2\pi c}{\omega_0} = 0,5$ μm (vert) ; $\gamma = 5.10^9$ s^{-1} et $\Omega = 8,82.10^{13}$ rad.s^{-1}. Commentaires ?

7. Les représentations graphiques de $n'(\omega)$ et de $n''(\omega)$ sont données ci-dessous, avec ω_1 et ω_2 les pulsations pour lesquels $\omega_0^2 - \omega^2 = \pm\gamma\omega$. Définir les 3 domaines de propagation alors rencontrés.



8. A l'aide de la question précédente, déterminer les expressions approchées à l'ordre 1 de ω_1 et ω_2 sachant que $\gamma << \omega_0$. En déduire la largeur de la bande $\omega_2 - \omega_1$. Commenter.

Facteur de transmission énergétique à l'interface air-mer (/ 7 pts)

Considérons une OPPM incidente polarisée rectilignement suivant l'axe (Ox), sous incidence normale (direction de propagation suivant l'axe (Oz)), traversant l'interface air-mer. Dans la suite, l'air sera considéré comme le milieu 1 d'indice optique n_1 , l'eau de mer comme le milieu 2 d'indice complexe $\underline{n}_2 = n_2' + in_2''$. L'onde incidente est alors de la forme complexe suivante :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 \, \mathrm{e}^{i(k_1 z - \omega t)} \, \vec{e}_x.$$

Elle engendre une onde réfléchie que l'on notera : $\underline{\vec{E}}_r = \underline{r} \, E_0 \, \mathrm{e}^{-i(k_1 z + \omega t)} \, \vec{e}_x$, ainsi qu'une onde transmise de la forme : $\underline{\vec{E}}_t = \underline{t} \, E_0 \, \mathrm{e}^{i(\underline{k}_2 z - \omega t)} \, \vec{e}_x$, avec $\underline{k}_2$, $\underline{r}$ et $\underline{t}$ complexes.

1. Donner les expressions de k_1 et $\underline{k}_2$, en fonction des indices des milieux.

2. Calculer les champs magnétiques $\underline{\vec{B}}_i$, $\underline{\vec{B}}_r$ et $\underline{\vec{B}}_t$ associés aux ondes incidente, réfléchie et transmise.

3. A partir des relations de continuités à la surface de l'eau de mer, sachant qu'il n' y a pas de courant surfacique, montrer que :

$$\underline{r} = \frac{n_1 - \underline{n}_2}{n_1 + \underline{n}_2} \qquad \text{et} \qquad \underline{t} = \frac{2\, n_1}{n_1 + \underline{n}_2}.$$

NOM-Prénom : . . . . PO-Groupe : . . . . . .

4. Calculer les valeurs moyennes sur une période des vecteurs de Poynting $<\vec{\Pi}_i>$, $<\vec{\Pi}_r>$ et $<\vec{\Pi}_t>$ associée aux ondes incidente, réfléchie et transmise à partir de la formule $<\vec{\Pi}>=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*\}$, en fonction de n_1, n_2', n_2'', μ_0, c, E_0, $|\underline{r}|^2$ et $|\underline{t}|^2$. Ensuite grâce à la conservation du flux de l'énergie au travers de l'interface, donner les expressions des pouvoirs de réflexion (R) et de transmission (T), en fonction de n_1 et $\underline{n}_2$.

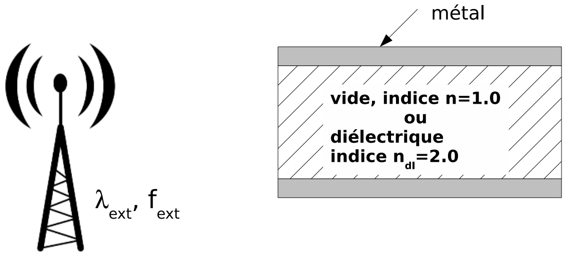
5. En prenant pour l'air un indice $n_1 = 1$, et pour $\underline{n}_2$ la formule approchée $\underline{n}_2 = \frac{1+i}{\alpha}$ avec $\alpha = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}}$, exprimer $T(\alpha)$. En supposant $\alpha << 1$, donner une bonne approximation de T, pour la gamme de fréquences considérées.

6. Application Numérique : calculer T pour $f = 10$ Mhz, et $f = 500$ khz. Commenter.

Guide d'ondes rectangulaire (/ 3 pts)

Un guide d'onde rectangulaire dans le vide a pour dimension $a = 2,4$ cm (// à (Ox)) et $b = 1,0$ cm (// à (Oy)). Il est excité par une antenne placée dans le vide, à l'extérieur du guide (voir schéma ci-dessous). L'antenne émet à une longueur d'onde λ_{ext} correspondant à une fréquence f_{ext}. On rappelle que le mode TE_{m0} est le mode où l'onde se réfléchit sur les plans $//$ à (Ox) et TE_{0n}, le mode où elle se réfléchit sur le plan $//$ à (Oy). De plus, pour un mode TE_{mn} l'expression de la longueur d'onde de coupure est :

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}, \text{ avec } n, m \text{ entiers.}$$



1. Donner l'expression des longueurs d'onde de coupure pour les modes TE_{10} , TE_{11} et TE_{20}.

2. En déduire la bande passante pour le mode TE_{10} en fonction de λ_{ext} et f_{ext}. Faire l'application numérique.

3. On remplit maintenant le guide avec un matériau diélectrique d'indice purement réel $n_{dl} = 2$, écrire la relation entre λ_{ext} et λ_{dl}.

4. Quelle est alors la nouvelle gamme de λ_{ext} à choisir pour observer une propagation en mode TE_{10} seulement ? Application Numérique.