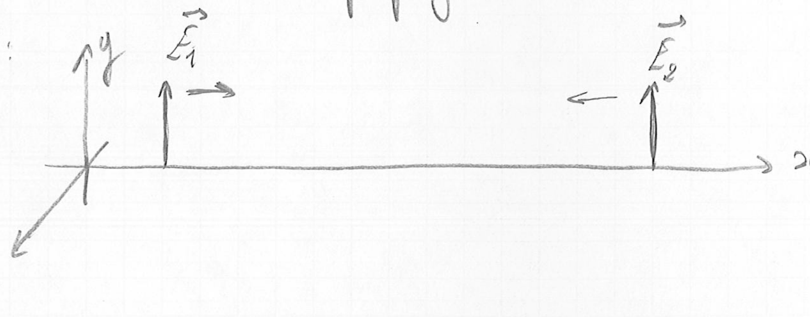
TD 1 : Ondes et propagation

MichelB

Exercice II.2 :



$\left(\vec B = \frac{1}{c}\,\vec e_x \wedge \vec E_y\right)$

$(1 > \alpha > 0)$ ↳ pas nécessaire ....

1) $\vec E(n,t) = E_0 \exp(-i\omega t) \times \left[\exp(ikx) + \alpha \exp(-ikx)\right] . \vec e_y$

$\vec B(n,t) = \frac{E_0}{c} . \left[e^{ikx} - \alpha e^{(-ikx)}\right] e^{-i\omega t} . \vec e_z$

$$\|\vec E\| = E_0 . \sqrt{(1+\alpha)^2\cos^2 kx + (1-\alpha)^2 \sin^2 kx}$$

$$\|\vec E\| = E_0 . \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha . \cos(2kx)}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\vec E = E_0 . \sqrt{1 + 2\alpha\cos(2kx) + \alpha^2} . \cos(\omega t - \varphi_E) . \vec e_y}$$

$$\|\vec B\| = \frac{E_0}{c} . \sqrt{(1-\alpha)^2\cos^2 kx + (1+\alpha)^2 \sin^2 kx}$$

$$= \frac{E_0}{c}\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(2kx)}$$

$$\hookrightarrow \vec B = \frac{E_0}{c}\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(2kx)} . \cos(\omega t - \varphi_B) . \vec e_z$$

2) $\frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{1+\alpha}{|1-\alpha|}$

a) E_{max} pour $x_n = \frac{n\pi}{k} = n . \frac{\lambda}{2}$

b) E_{min} pour $x_n = \frac{(2n+1)}{2}\frac{\pi}{k} = (2n+1) . \frac{\lambda}{4}$

3) $\vec E(n,t) = E_0 \left[(1+\alpha)\cos kx + i(1-\alpha)\sin kx\right] e^{-i\omega t} . \vec e_y$

$\| \varphi_E = \arctan\left[\frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}\tan kx\right] - \omega t$

$\vec B(n,t) = \frac{E_0}{c}\left[(1-\alpha)\cos kx + i(1+\alpha)\sin kx\right] e^{-i\omega t} . \vec e_z$

⟹

$$\varphi_B = \arctan\left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha} . \tan kx\right] - \omega t \qquad (\alpha \neq 1)$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_E = \underbrace{\arctan\left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha} . \tan kx\right]}_{\varphi_1} - \underbrace{\arctan\left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha} . \tan kx\right]}_{\varphi_2}$$

$$\hookrightarrow \quad \tan\varphi = \tan(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{1 + \tan\varphi_1 . \tan\varphi_2}$$

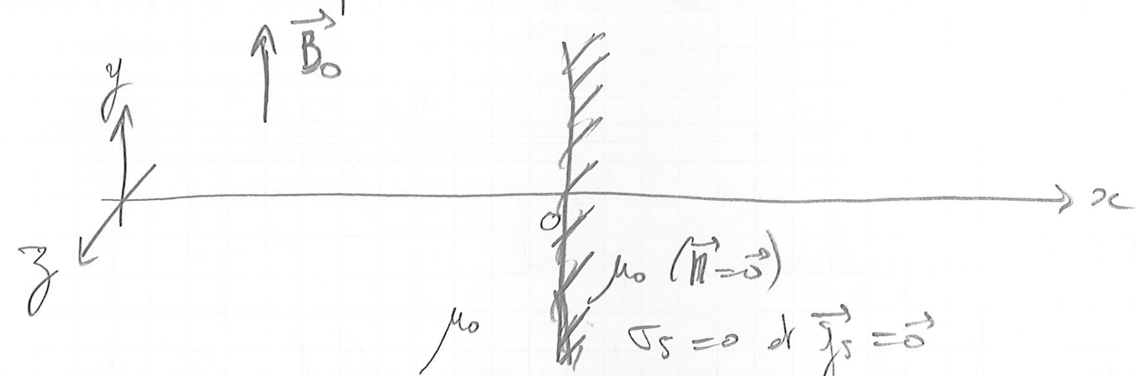
$$= \frac{\left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right]\tan kx}{\underbrace{1 + \tan^2 kx}_{= \frac{1}{\cos^2 kx}}}$$

$$\tan\varphi = \frac{4\alpha}{1-\alpha^2} \cos kx . \sin kx$$

D'où $\tan\varphi = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} . \sin 2kx \iff \boxed{\varphi = \arctan\left[\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} . \sin 2kx\right]}$

4)

Exercice II-3 . p II-24 :



1) Dans le supraconducteur : $\begin{cases} \vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} \\ \vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$ avec $\vec{j} = -\dfrac{\vec{A}}{\mu_0 d_L^2}$

D'où $$\boxed{\vec{rot}\,\vec{B} = -\frac{\vec{A}}{d_L^2}}$$

2 possibilités : • $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$ d'où $\vec{A}$ ... d'où $\vec{B}$

• $\vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{B} = -\dfrac{\vec{B}}{d_L^2}$ avec $\vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{X} = -\vec{grad}\,div\,\vec{X} - \Delta\vec{X}$

Comme $div\,\vec{B} = 0$, $$\Delta\vec{B} - \frac{\vec{B}}{d_L^2} = \vec{0}$$

D'après la sym du pb, $\vec{B}$ ne dépend que de x d'où $$\boxed{\frac{d^2\vec{B}}{dx^2} - \frac{\vec{B}}{d_L^2} = \vec{0}}$$

De plus, à l'interface, on a continuité de la composante tangentielle et normale de $\vec{B}$ donc $\vec{B}$ est selon $\vec{e_y}$ et $\vec{B}(x=0) = \vec{B_0}$.

Soit $$\boxed{\vec{B} = B_0 . e^{-x/d_L} . \vec{e_y}}$$

(⚠ on prend la racine co[...] $-1/d_L$ pour avoir atténua[...]
↳ on ne peut pas ↗ $\vec{B}$.)

⇒ d_L : longueur caractéristique d'atténuation de $\vec{B}$ ds le supra ⟹ profondeur de pénétration de B.

2) · $B(x)$ tq $B(x) = 1\%$ de B_0

$$e^{-x/d_L} = 0{,}01 \Rightarrow x_{1\%} = -d_L \cdot \ln 0{,}01 .$$

$$= 4{,}6 \times d_L$$

$$\boxed{x_{1\%} = 73{,}7 \text{ nm.}}$$

· $d_L = 160$ Å → profondeur de pénétration

↳ très faible → compatible avec effet Meissner.

3)· $\vec{j}(x) = -\dfrac{\vec{A}}{\mu_0 d_L^2}$ or $\vec{rot}\,\vec{A} = \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix}$

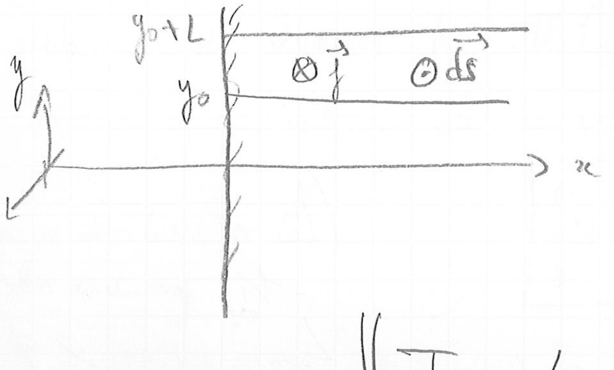
↳ $$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = B$$

Comme indépt de y et z, $-\dfrac{\partial A_z}{\partial x} = B$

$$\boxed{\vec{A} = +B_0 . d_L e^{-x/d_L} . \vec{e_z}}$$

D'où $\left\| \vec{j}(x) = -\dfrac{B_0}{\mu_0 . d_L} e^{-x/d_L} . \vec{e_z} \right.$

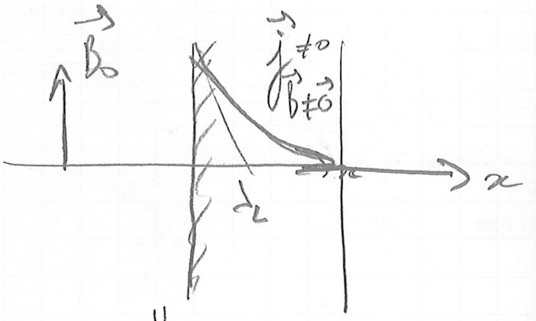
· $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow$ d'où $\vec{j} = \dfrac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial x} \end{pmatrix} = -\dfrac{B_0}{\mu_0 d_L} e^{-x/d_L} . \vec{e_z}$



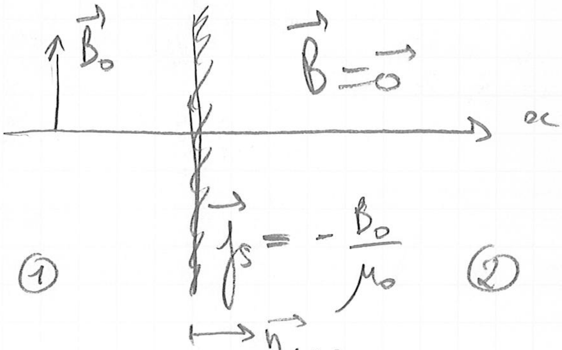
$$I = \int_{y_0}^{y_0+L} \int_0^{\infty} \vec{j} . \vec{dS} = \int_{y_0}^{y_0+L} dy \int_0^{\infty} -\frac{B_0}{\mu_0 d_L} e^{-x/d_L} dx$$

$$\left\| I = L . \left[\frac{B_0}{\mu_0} e^{-x/d_L} \right]_0^{\infty} = -\frac{L . B_0}{\mu_0} \right.$$

Comme la profondeur de pénétration est faible, on peut modéliser le pb par un courant superficiel de $\vec{j_s}$ tel que $\boxed{\vec{j_s} = -\frac{B_0}{\mu_0}\vec{e_z}}$



$\Downarrow$



C'est un modèle !
Ne pas l'utiliser pour déterminer $\vec{B}$ ds le supraconducteur car il ne serait pas valide (de m̂ pour la relation de passage...)

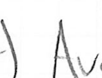
4) Avec cette modélisation du problème, la relation de passage devient :

$$\vec{n}_{1\to2}\wedge(\underbrace{\vec{H}_2}_{=0} - \vec{H}_1) = \vec{j_s} \quad \text{soit} \quad \boxed{-\frac{B_0}{\mu_0} = j_s} \text{ selon } \vec{e_z}.$$

ou. ↳ $\boxed{B_1 = B_0}$ à l'interface.

5) $d\vec{F} = I\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$ avec $I = \int \vec{j}\cdot\vec{dS}$

d'où $d^2\vec{F} = \vec{j}\cdot\vec{dS}\,.\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$



$d^3\vec{F} = \vec{j}\wedge\vec{B}\,.\,\underbrace{dv}_{=dxdydz}$

$d^3F = dq.\vec{v}\wedge\vec{B}$
$(\rho\vec{v})\wedge\vec{B}.d^3v$
$=(\vec{j}\wedge\vec{B})\,d^3V$

d'où $d^2\vec{F} = -\int_0^\infty j.B\,dx\,.\,d^2S'.\vec{e_x} \Rightarrow \frac{d^2\vec{F}}{d^2S'} = \int_0^\infty -\frac{B_0^2}{\mu_0\lambda_L} e^{-2x/\lambda_L}\,dx\,(-\vec{e_x})$

$d^2S' = dy.dz$

$$\frac{d^2\vec{F}}{dS'} = \frac{B_0^2}{\mu_0 \lambda_L} \cdot \left[-\frac{\lambda_L}{2} e^{-2x/\lambda_L} \right]_0^{\infty} \cdot \vec{e_x}$$

$$\boxed{P = \frac{d^2\vec{F}}{dS'} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \vec{e_x}}$$

$\Rightarrow$ le supraconducteur est repoussé avec une pression de $\frac{B_0^2}{2\mu_0}$.

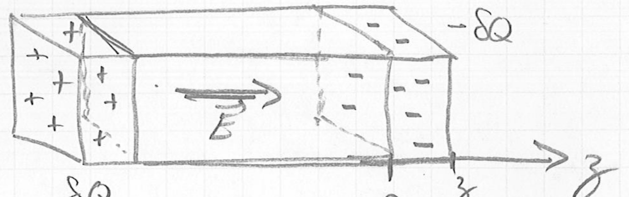
<u>AN :</u> $\frac{d\vec{F}}{dS'} = 129 \ N/m^2$.

$\Rightarrow$ lévitation.

Ondes et propagation : NIC A et B **TD3** et TD4

Exercice II.5 (page II.25)

1) après application d'un champ $\vec{E}_{ext}$: $\xleftarrow{\vec{E}_{ext}}$



• 2 blocs de particules chargées $\pm e$.
de densité $n = n_i = n_e$

• Ions $\Rightarrow$ grde inertie donc immobiles.

Détermination de $\vec{E}$:

$$\delta Q = e.n_i.S.z \quad \text{et} \quad -\delta Q = -e n_e S z$$

Ces 2 couches créent entre elles un champ : $\vec{E} = \dfrac{\sigma_s}{\varepsilon_0} = \dfrac{\delta Q}{S.\varepsilon_0} = E_z.\vec{e_z}$

D'où $$\boxed{E_z = \frac{e.n.z}{\varepsilon_0}}$$

Équation du mouvement : $m_e\vec{a} = \vec{F} = -e\vec{E}$

D'où $$\boxed{m_e\ddot{z} = -\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0} z}$$

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{e^2 n_e}{m_e.\varepsilon_0}.z = 0}$$

$\hookrightarrow$ $z = z_0.\cos(\omega_p t + \varphi)$ avec $\boxed{\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_e.e^2}{m_e.\varepsilon_0}}}$

• Pas d'atténuation car on néglige les chocs dus à l'agitation thermique : approx plasma froid.

2) AN : $n_e = 10^{11}\ m^{-3}$ $\qquad m_e = 9{,}11.10^{-31}$ kg

$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36.\pi 10^9}$ .F.m^{-1}

$e = 1{,}6.10^{-19}$ C

$\boxed{\omega_p = 17{,}8\ \text{Mrad.s}^{-1}}$ $\qquad \nu_p \simeq 2{,}8$ MHz

Ondes et propagation : Mic A et B

Exercice II.5.2 (page II.26)

$\vec{E} = \vec{E_0} \exp i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t) \vec{e_z}$

1) Mvt d'un ion : $m_i \vec{a} = e\vec{E}$

Selon $\vec{e_z}$: $m_i \ddot{\vec{r}} = e\vec{E}$ ⚠ $r \neq$ de celui de l'onde.

En RSF et en not. cplx : $-\omega^2 \vec{r_z} = \frac{e}{m_i}\vec{E}$

$\vec{r_z} = -\frac{e}{\omega^2 m_i}\vec{E}$

$$\vec{j_i} = n(e)\dot{r_z}\vec{e_z} = i\frac{ne^2}{m_i\omega}\vec{E}\vec{e_z}$$

Mvt d'un e^- : $m_e\vec{a} = -e\vec{E}$

D'où $-\omega^2\vec{r_z} = \frac{-e}{m_e}\vec{E} \Rightarrow \vec{r_z} = \frac{-e}{m_e\omega^2}\vec{E}$

$$\vec{j_e} = n(-e)\dot{r_z}\vec{e_z} = i\frac{ne^2}{m_e\omega}\vec{E}.$$

D'où $\vec{j} = \vec{j_i} + \vec{j_e} = i\frac{ne^2}{\omega}\left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i}\right)\vec{E}$

$\vec{j} = \sigma\vec{E}$ d'où $\boxed{\sigma = \frac{ine^2}{\omega}\left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i}\right)}$

2) $k^2 = \mu_0 \underline{\varepsilon}^* \omega^2$ avec $\underline{\varepsilon}^* = \varepsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega}$

$\underline{\varepsilon}^* = \varepsilon_0\left(1 + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)$

$\underline{\varepsilon}^* = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2 + \Omega_p^2}{\omega^2}\right)$

$\underline{\varepsilon}^* = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_p^2}\right)$

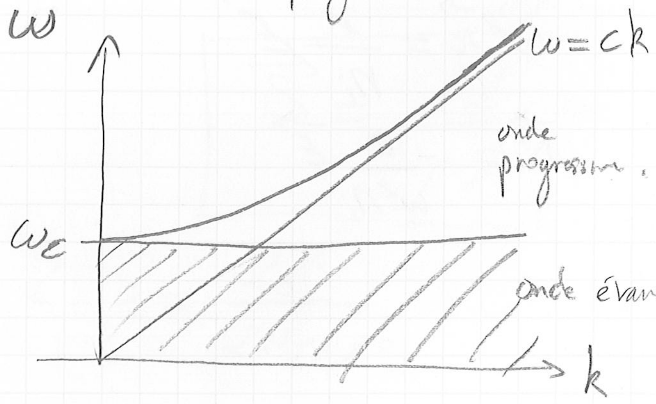
D'où $$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}.$$

3) Si $\omega < \omega_c$, $k^2 < 0$ donc k imaginaire pur.

↳ Onde évanescente.

Si $\omega > \omega_c$, $k^2 > 0$ donc k réel

↳ onde progressive sans atténuation.



$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{c^2k^2 + \omega_c^2}}$$

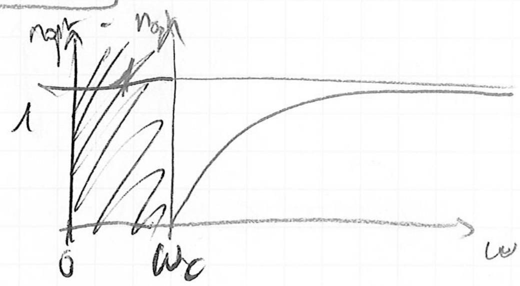
$k = 0$, $\omega = \omega_c$

$k \to \infty$, $\omega \to ck$

4) $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_{opt}}$ d'où $n_{opt} = \frac{c_0 k}{\omega}$

$$\boxed{n_{opt} = \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$ défini pour $\omega > \omega_c$.

Rem: $n_{opt} < 1$



5) Si $\omega > \omega_c$: $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$

Donc $\vec{E} = \vec{E_0} . \exp i\left(\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{c} . z - \omega t\right)$.

Si $\omega < \omega_c$:

$$k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c} = i k''$$

Donc $\vec{E} = E_0 . \exp(-k''z) . \exp(-i\omega t)\, e_z$ onde évanescente.

6) $\mathrm{div}\, \vec{E} = i\vec{k}.\vec{E} = \frac{\rho_{Total}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_i + \rho_e}{\varepsilon_0} = \frac{e(n_i - n_e)}{\varepsilon_0} = 0$ car $n_i = n_e$.

Exercice II.5.2 (p II.26) (Suite)

6) Donc $\boxed{\vec{k} \perp \vec{E}.}$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = i\vec{k}\cdot\vec{B} = \vec{0}$ donc $\boxed{\vec{k} \perp \vec{B}}$

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = i\vec{k} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega\vec{B}$ donc $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}}$

↳ $\vec{k}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un trièdre direct et l'onde est bien transverse.

7) • $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}} > c$ (quand $\omega > \omega_c$)

• $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$

d'où $2k\,dk = \frac{2\omega\,d\omega}{c^2}$ et $\frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 \cdot k}{\omega}$

i.e., $\boxed{v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}} = c\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}} < c$.

8) 1) $M \gg m$ donc $\frac{1}{M} \ll \frac{1}{m}$, soit $\boxed{\sigma_i \ll \sigma_{e^-}}$

D'où $\vec{j} \simeq \vec{j_e} = i\frac{ne^2}{m_e\omega}\cdot\vec{E}$, $\sigma \simeq \sigma_e = \frac{ine^2}{m_e\omega}$

et $\boxed{\omega_c^2 \simeq \omega_p^2}$. et $\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega_c} \approx \frac{2\pi c}{\omega_p}$

AN: $\omega_c \simeq 62{,}6\cdot 10^6\ \mathrm{rad.s^{-1}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\nu_c = 10\ \mathrm{MHz}.}$

$\boxed{\lambda_c = 30{,}1\ \mathrm{m}.}$

2) Pour traverser l'ionosphère : $\lambda < \lambda_c = 30\ \mathrm{m}$.
|| Ondes métriques $\Rightarrow$ TV.

9) $\underline{E} = E_{0x} \cdot \exp i(k.z - \omega t).\vec{e_x}$

1) $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{k}{\omega}(\vec{e_z} \wedge \underline{\vec{E}}) = \frac{1}{v_\varphi} E_0 \exp i(kz - \omega t).\vec{e_y}$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{v_\varphi . \mu_0} . \cos^2(kz - \omega t).\vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{E_0^2}{v_\varphi . \mu_0} . \cos^2\left[\omega\left(\frac{z}{v_\varphi} - t\right)\right].\vec{e_z}}$$

et $\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0^2}{2 . v_\varphi . \mu_0}$

2) $u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2(kz - \omega t) + \frac{E_0^2}{2\mu_0 v_\varphi^2} \cos^2(kz - \omega t)$

D'où $$u = \frac{E_0^2}{2\mu_0} . \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{v_\varphi^2}\right) \cos^2\left[\omega\left(\frac{z}{v_\varphi} - t\right)\right]$$

$$\langle u \rangle = \frac{E_0^2}{4 . \mu_0}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{v_\varphi^2}\right)$$

3) • $\operatorname{div} \vec{S} = \frac{\partial S}{\partial z} = -\frac{2 E_0^2 \omega}{v_\varphi^2 . \mu_0} \sin(\quad) \cos(\quad)$

• $\frac{\partial u}{\partial t} = + \frac{E_0^2 \omega}{\mu_0}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{v_\varphi^2}\right) \sin(\quad) \cos(\quad)$

• $\vec{j} . \vec{E} = \operatorname{Re}\left(i \frac{n e^2}{m_e \omega} . \underline{\vec{E}}\right) . \vec{E} = \operatorname{Re}\left(i \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega} \underline{\vec{E}}\right) . \vec{E}$

$$= - \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega} . E_0^2 \sin(\quad) . \cos(\quad)$$

Or $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = c^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_\varphi^2}\right)$ d'où $\vec{j} . \vec{E} = \frac{E_0^2 \omega}{\mu_0}\left(\frac{1}{v_\varphi^2} - \frac{1}{c^2}\right) \sin(\quad) \cos(\quad)$

d'où le résultat demandé.