Équation de dispersion du milieu (M.L.H.I) :

$$\Delta \underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}\,\underline{\rho}_{\text{Total}} + \mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{j}}_{\text{Total}}}{\partial t}$$

OPPH not. complexe $\left(\begin{array}{l} \Delta \equiv -k^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv -\omega^2 \end{array} \right. \ldots$

$$\boxed{\underline{k}^2(\omega) = \underline{\mu}\,\underline{\varepsilon}_g\,\omega^2 \quad \text{avec} \quad \underline{\varepsilon}_g = \underline{\varepsilon} + \frac{i\underline{\sigma}}{\omega}}$$

avec $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ (OPPH)

Démonstration : Équation de propagation de $\underline{\vec{H}}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{H}}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\underline{\vec{H}}) - \Delta \underline{\vec{H}} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{j}_{\text{libre}}) + \frac{\partial\, \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{D}}{\partial t}$$

avec $\underline{\vec{B}} = \underline{\mu}\,\underline{\vec{H}}$
$\underline{\vec{D}} = \underline{\varepsilon}\,\underline{\vec{E}}$
$\vec{j}_{\text{libre}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}$

D'où

$$-\Delta \underline{\vec{H}} = \overrightarrow{\text{rot}}(\sigma \cdot \underline{\vec{E}}) + \underline{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}})$$

$$-\Delta \underline{\vec{H}} = \underline{\sigma}\left(-\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}\right) + \underline{\varepsilon}\left(-\frac{\partial^2 \underline{\vec{B}}}{\partial t^2}\right)$$

$$\Delta \underline{\vec{H}} = \underline{\mu}\,\underline{\sigma}\frac{\partial \underline{\vec{H}}}{\partial t} + \underline{\mu}\,\underline{\varepsilon}\frac{\partial^2 \underline{\vec{H}}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta \underline{\vec{H}} - \underline{\mu}\left(\underline{\sigma}\frac{\partial \underline{\vec{H}}}{\partial t} + \underline{\varepsilon}\frac{\partial^2 \underline{\vec{H}}}{\partial t^2}\right) = \vec{0}}$$

En notation complexe :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta \equiv -\underline{k}^2 \\ \frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv (-i\omega)^2 = -\omega^2 \end{array}\right\} \text{car } \underline{\vec{H}} = \vec{H}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\left[-\underline{k}^2 - \underline{\mu}\left(-i\underline{\sigma}\omega - \underline{\varepsilon}\omega^2\right)\right] \cdot \underline{\vec{H}} = \vec{0}$$

Or $\vec{H} \neq \vec{0}$ donc

$$\underline{k}^2 = \underline{\mu}(i\underline{\sigma}\omega + \underline{\varepsilon}\omega^2)$$

$$\underline{k}^2 = \underline{\mu}\,\underbrace{\left(\underline{\varepsilon} + \frac{i\underline{\sigma}}{\omega}\right)}_{\underline{\varepsilon}_g}.\omega^2 \qquad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \text{ (vide)} \right)$$

Avec $\left.\begin{array}{l} \underline{\mu} = \mu_0 . \underline{\mu_r} \\ \underline{\varepsilon} = \varepsilon_0 . \underline{\varepsilon_r} \end{array}\right\}$, on obtient $\boxed{\underline{k}^2 = \underbrace{\underline{\mu_r}\left(\underline{\varepsilon_r} + \frac{i\underline{\sigma}}{\varepsilon_0\omega}\right)}_{\text{sans dimension} \; = 1 \text{ dans le vide.}} . \frac{\omega^2}{c^2}}$ "car du vide"

Rem: • $\underline{k}^2$ est complexe ! $\Rightarrow$ $\underline{k} = k' + ik''$ avec $k', k'' \in \mathbb{R}$.

• $\underline{\mu_r}(\omega)$, $\underline{\varepsilon_r}(\omega)$ et $\underline{\sigma}(\omega)$ sont fonction de ω !

$\hookrightarrow$ $\underline{k}^2(\omega) \Longrightarrow \underline{k}(\omega) = k'(\omega) + i k''(\omega)$

Cela conduit à 3 types de propagation : en fonction de la "nature" de k^2...

• Si k^2 est réel :

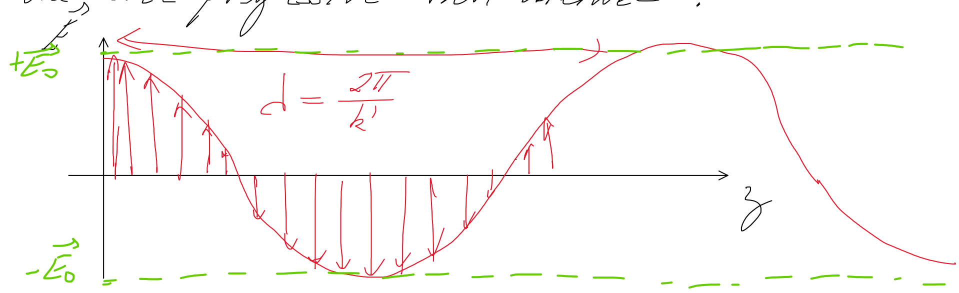
* k^2 réel > 0 : alors $k = \pm\sqrt{k^2}$ est un réel pur.

$k(\omega) = k'(\omega)$. (ici on prend $+\sqrt{k^2}$)

Dans ce cas : $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{i(k'z - \omega t)}$

et $\vec{E} = Re(\underline{\vec{E}}) = \vec{E_0} . \cos(k'z - \omega t)$

C'est une onde progressive non atténuée :



Rem: C'est le cas du vide ; $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ un réel > 0 $(\forall \omega)$.

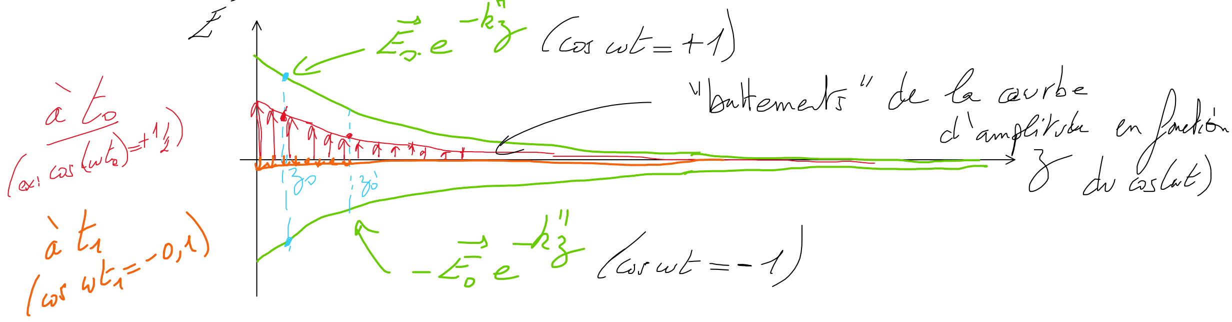
* k^2 réel < 0 : $\underline{k} = i\sqrt{-k^2} = ik''$ un imaginaire pur.

Dans ce cas : $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}\, e^{i(ik''z - \omega t)}$

$= \underline{\vec{E_0}}\, e^{-k''z} . e^{-i\omega t}$

$$\vec{\mathcal{E}} = Re(\vec{\underline{E}}) = \underbrace{\vec{\mathcal{E}}_0 . e^{-k z}}_{\text{amplitude atténuée.}} . \cos(\omega t)$$

On obtient une onde stationnaire atténuée (onde évanescente)



- Si k^2 est complexe (cas général) :

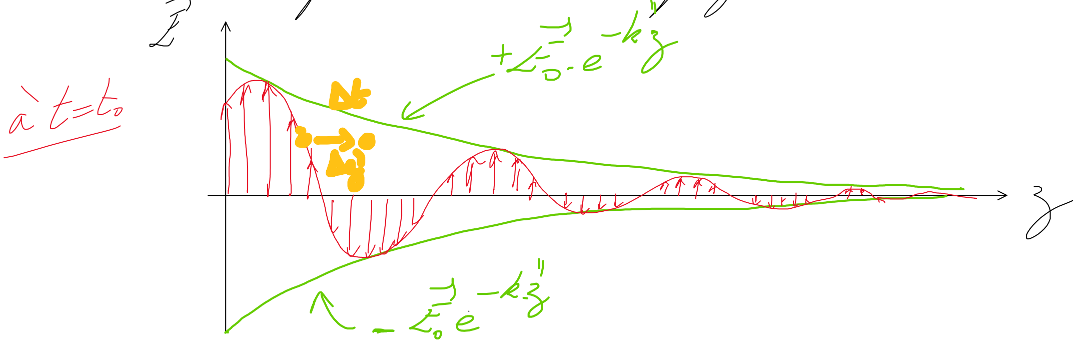
On écrit $\underline{k}(\omega) = \sqrt{\underline{k}^2} = k'(\omega) + i k''(\omega)$ $(k', k'' \in \mathbb{R})$

Dans ce cas : $\vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_0 \, e^{i(\underline{k} z - \omega t)}$

$$= \underbrace{\vec{\mathcal{E}}_0 . e^{-k'' z}}_{\text{amplitude atténuée}} . \underbrace{e^{i(k' z - \omega t)}}_{\text{propagation.}} \quad \text{phase } \varphi(z,t)$$

en effet $\vec{\mathcal{E}} = Re(\vec{\underline{E}}) = \vec{\mathcal{E}}_0 . e^{-k'' z} . \cos(k' z - \omega t)$

On est en présence d'une onde progressive atténuée.



Vitesse de phase :
(si l'onde se propage)

$$v_\varphi = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{\varphi = cste} \quad \text{avec } \varphi = k' z - \omega t$$

$$d\varphi = 0 = k' dz - \omega dt$$

Donc $\boxed{v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k'(\omega)}}$

Rem : Si la vitesse de phase varie en fonction de ω, alors le milieu est dispersif !

Rem : Dans le vide $v_\varphi = c = cste \; (\forall \omega)$ donc le vide n'est pas un milieu dispersif.

Vitesse de groupe : Vitesse réelle d'un paquet d'OPPM (donc d'un signal électromagnétique réel)

$$\boxed{v_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk'}}$$

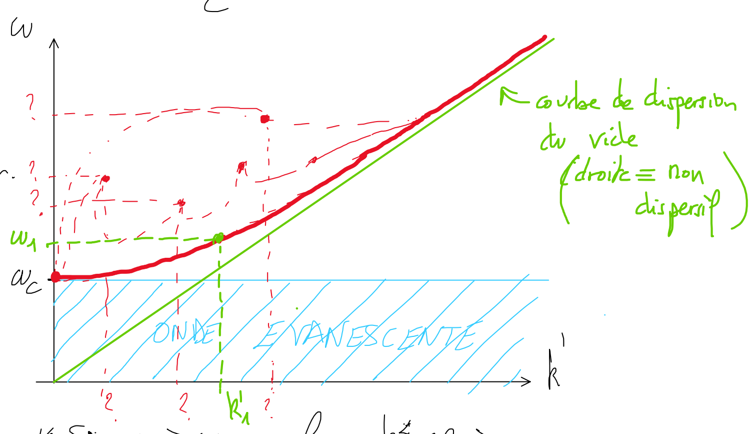
Rem : Si v_φ dépend de ω, alors v_g aussi

Rem : Dans le vide, $v_\varphi = c$ $\forall \omega$ donc $v_g = c = \text{cste}$.

On définit aussi l'indice optique du milieu par $\boxed{n_{opt}(\omega) = \dfrac{c}{v_\varphi(\omega)}}$.

Courbe de dispersion : $\boxed{\omega = f(k'(\omega))}$

On prend par exemple : $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$ $\quad$ (ω_c réel > 0)



- La courbe de dispersion est définie lorsqu'il y a propagation. (k^2 réel > 0 ou k^2 complexe)

Ici :

$*$ Si $\omega < \omega_c$, alors k^2 réel < 0.

↳ $\underline{k}(\omega) = i\sqrt{\dfrac{\omega_c^2 - \omega^2}{c^2}}$

$\underline{k}(\omega) = i\,k''(\omega)$

Onde évanescente.

$*$ Si $\omega > \omega_c$, alors k^2 réel > 0

↳ $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) = \sqrt{\dfrac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}}$

$\Rightarrow$ Propagation sans atténuation ($k'' = 0$)

Rem : On trace la courbe de dispersion du vide comme référence dans la comparaison avec le M.L.H.I. Pour le vide : $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$

donc $\omega = ck = \boxed{c}k'$ (k réel pur $\equiv k'$)

↖ vitesse de phase dans le vide.

* On trace la courbe : • soit on a accès à $\omega = f(k')$

• soit on a juste l'équation de dispersion

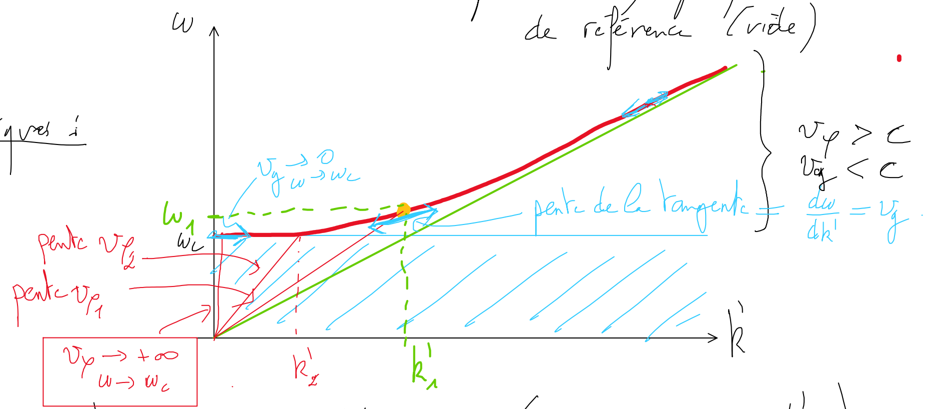
$$\boxed{k'^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}} = \frac{\omega^2}{c^2} - \underbrace{\frac{\omega_c^2}{c^2}}_{\text{cste}}$$

On étudie les points-clés :

- $k' = 0 \iff \omega = \omega_c$
- $\omega = 0 \implies$ pas de propagation $(\omega < \omega_c)$
- Si $\omega \to +\infty$, $k' \to +\infty$ et $\underbrace{k'^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}}_{}$ (ω_c négligeable devant ω)

Comportement asymptotique avec la droite de référence (vide)

Remarques :



Vitesse de phase : $v_{\varphi_1} = \frac{\omega_1}{k'_1}$ (ie $\omega_1 = v_{\varphi_1} \cdot k'_1$)

On voit que v_φ dépend de $\omega \Rightarrow$ le milieu est dispersif (courbe !)

Vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \omega'(k')$ (dérivée de $\omega(k')$)

↳ c'est la pente de la tangente en 1 point de la courbe.

On constate : pour $\omega > \omega_c$, $v_\varphi > c$, $v_g < c$

- Si $\omega \to +\infty$, $v_\varphi \to c$, $v_g \to c$
- Si $\omega \to 0$, $v_\varphi \to +\infty$, $v_g \to 0$

Rem :