

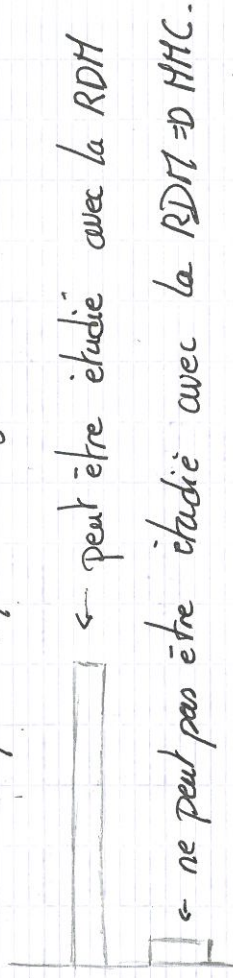
Résistance des matériaux
Mécanique des milieux continus.

(Gradient: Vecteur dont les composantes traduisent les variations d'un champs.)

Solides déformables en mmc et RDH.

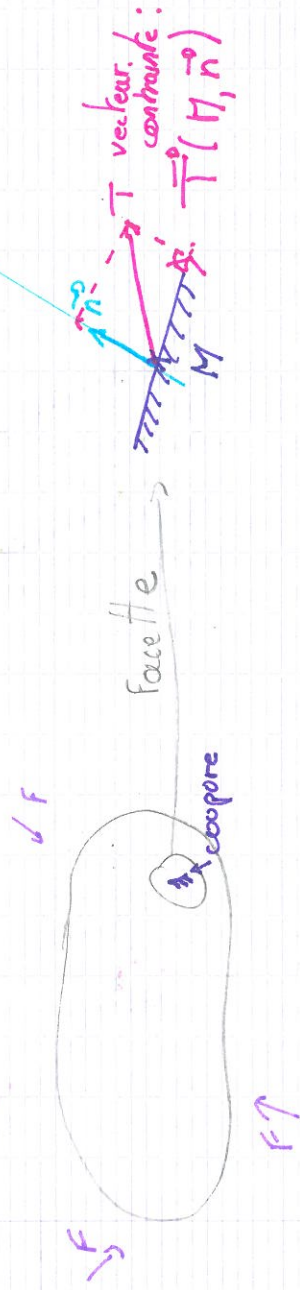
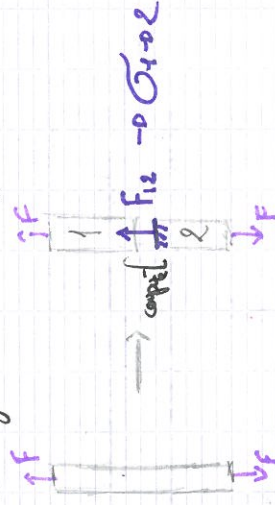
Différence HMC et RDH \rightarrow RDH applicat° de la MHC.

Travail sur poutre/poteau: géométrie élastée-(contour de massif).



\rightarrow Théorie des contraintes

Compression \rightarrow négatif, Traction \rightarrow positif.
Homogène à $N/m^2 = Pa$.



III Théorie des déformations

Pour qu'il y ai déformat° du solide il faut qu'il y ai un gradient du champs de déplacement.
 ↳ variateurs spatiale d'une grandeurs-
 champ

grad d'un scalaire → vecteur

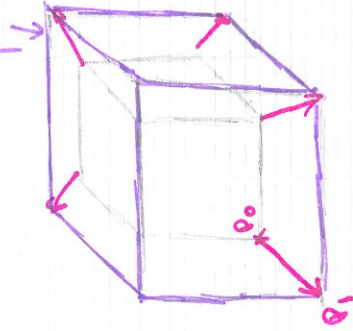
grad champs vectoriel → tenseur (matrice).

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

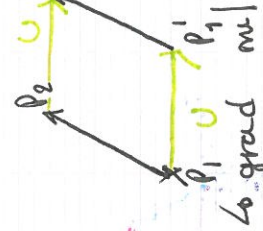
tenseur

après sollicitation

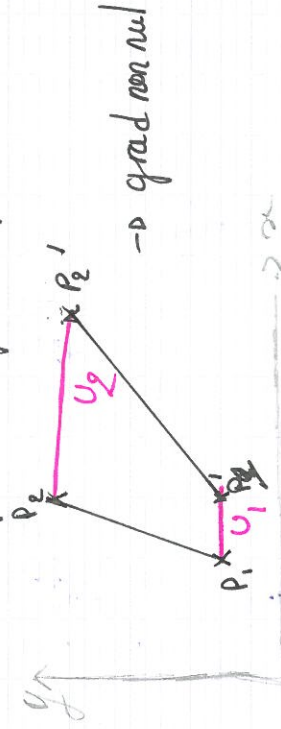


P_0 Vecteur déplacement
 En les pts : $P_0, (x, y, z) =$ Champs de déplacement
 ↳ champs vectoriel

$$\vec{P}_0 \vec{P}_1 \begin{pmatrix} U(x, y, z) \\ V(x, y, z) \\ W(x, y, z) \end{pmatrix}$$



Si pas de gradient → U, V, W csté-
 donc déplacement pas déformé.



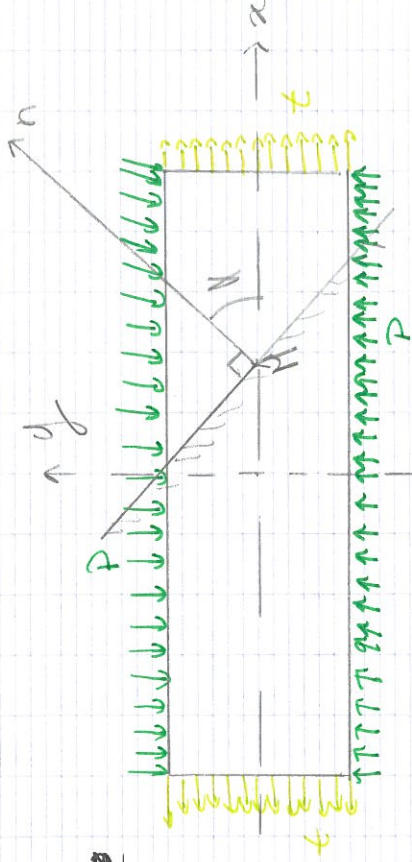
III) Relation $\sigma - \epsilon$ (contraintes - déformations): Élasticité linéaire (loi de Hooke).

IV) Méthode de calcul en élasticité linéaire.
 ↳ méthode de G (Eq° de Beltrami)
 ↳ méthode des déplacements (Eq° de Navier).

Exercice 1: Contraintes dans un solide

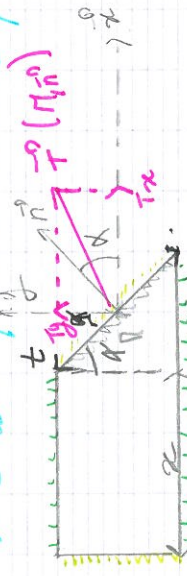
Plaques minces

longueur b
 largeur a
 épaisseur e



t et p = efforts surfaciq
 Hypothèse: Équilibre statiq ⊕ matériaux continue isotope

1) Que vaut le vecteur contrainte $\vec{T}(\Pi, \vec{n})$ en un pt M d'une facette orientée par \vec{n} tq $(\vec{x}_0, \vec{n}_0) = \alpha$.



$$\vec{T}(\Pi, \vec{n}) = T_x \vec{x}_0 + T_y \vec{y}_0$$

Solide équilibre statique:

↳ Bilan des efforts selon x :

$$-t \times a e + T_x \times e \frac{a}{\cos \alpha} = 0 \Rightarrow T_x = t \cos \alpha. > 0 \text{ trad}^\circ$$

secteur "droite" "incliné" !!

↳ Bilan des efforts en y :

$$-p x e + p (x + a t g \alpha) e + T_y e \frac{a}{\cos \alpha} = 0$$

$$\Rightarrow T_y = p x + p a t g \alpha - p a t g \alpha \times \cos \alpha$$

$$= -p \sin \alpha < 0 \text{ compress}^\circ$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} T_x(M, \vec{n}) \\ T_y(M, \vec{n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cos \alpha \\ -p \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Cas particulier: $\alpha = 0 \Rightarrow \vec{T}(M, \vec{x}) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{T}(M, \vec{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -p \end{bmatrix}$

2) Déterminer les contraintes normales et relative au

vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} t \cos \alpha \\ -p \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{M, \vec{xyz}\}$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{M, \vec{xyz}\}$$

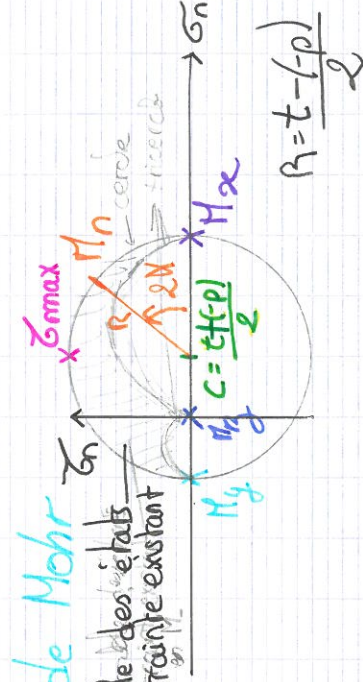
! car \vec{n} unitaire ici.

$$t \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n} = t \cos^2 \alpha - p \sin^2 \alpha \\ \tau_n = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{z} = -(t + p) \cos \alpha \sin \alpha \end{cases}$$

Cercle de Mohr

Ensemble des états de contrainte existant



3) Écrire le tenseur des contraintes en M du repère $\{M, \vec{xyz}\}$ cisaillément

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

normale

Exemple: σ_{xy} = composante du vecteur contrainte agissant sur une facette orientée par \vec{x} dans la direction \vec{y}

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n}$$

↑
tenseur

↑
unitaire

(Rappel: $\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} t \cos \alpha \\ -p \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (M, \vec{x}) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [G] \cdot \vec{x}$

$\Rightarrow \vec{T}(M, \vec{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} x + \tau_{xy} y + \tau_{xz} z \\ \tau_{xy} x + \sigma_{yy} y + \tau_{yz} z \\ \tau_{xz} x + \tau_{yz} y + \sigma_{zz} z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} \sigma_{xx} = t \\ \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{xz} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow D [V] = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

$\vec{T}(M, \vec{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -p \\ 0 \end{bmatrix} = [V] \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} \tau_{xy} & \tau_{yz} \\ \sigma_{yy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{cases} \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_{yy} = -p \\ \tau_{yz} = 0 \end{cases}$

$\vec{T}(M, \vec{z}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = p \tau_{yz} = 0$

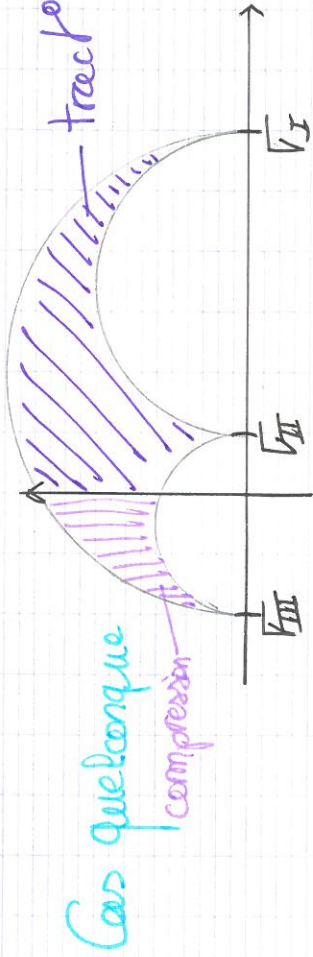
$\Rightarrow D [V] = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matrice diagonale \Rightarrow pas de cisaillement
 $\{M, xyz\}$ = repère principale

de direction principale x, y, z .

Direction principale défini une facette où il n'y a pas de cisaillement et contrainte normale extrême.

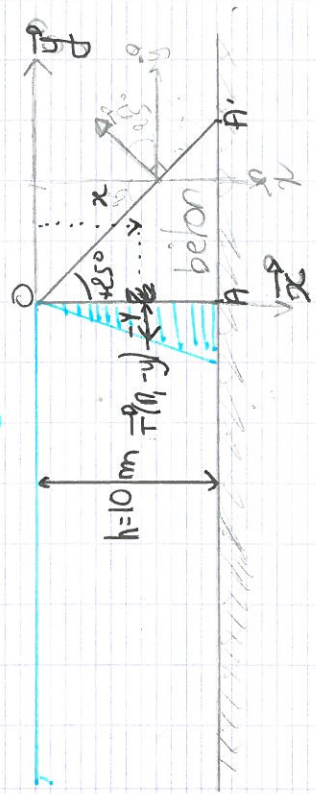
Mécanique des solides
 Laouze



Cas quelconque

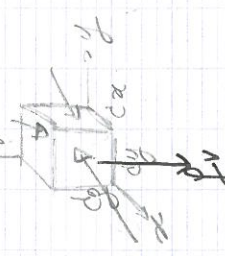
Exercice : Barrage poids

Press de l'eau augmente de façon linéaire par 1 à la profondeur



Béton : $2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Barrage soumis à son poids propre et à la pression hydraulique appelée $\vec{p}(x) = S \cdot x \cdot \vec{y}^0$

Force volumique $\rightarrow \vec{f}_v + \text{div} [\vec{\sigma}] = \vec{0}$ | Egalité d'équilibre locale effort surfacique $\rightarrow \text{div} [\vec{\sigma}] = \text{effort volumique}$



On donne :

Champs de tenseur de contraintes en \pm point $\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$

avec
$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 21000x - 143400y \\ \sigma_{yy} = -10000x \\ \sigma_{xy} = -46000y \end{cases}$$

$S = 10000 \text{ N/m}^3$ \rightarrow Delta relatif à la variation de la pression. $\vec{p} = S \cdot x \cdot \vec{y}^0$

\neq entre conditions initiales et conditions limites ; \rightarrow limite du champs de serfs à $t = 0$

Montrer que les conditions aux limites sont vérifiées sur OA et OA'.

Face OA : Etat de contrainte sur cette frontière ? On isole une facette située à la profondeur x . Facette orientée par $-\vec{y}^0$.

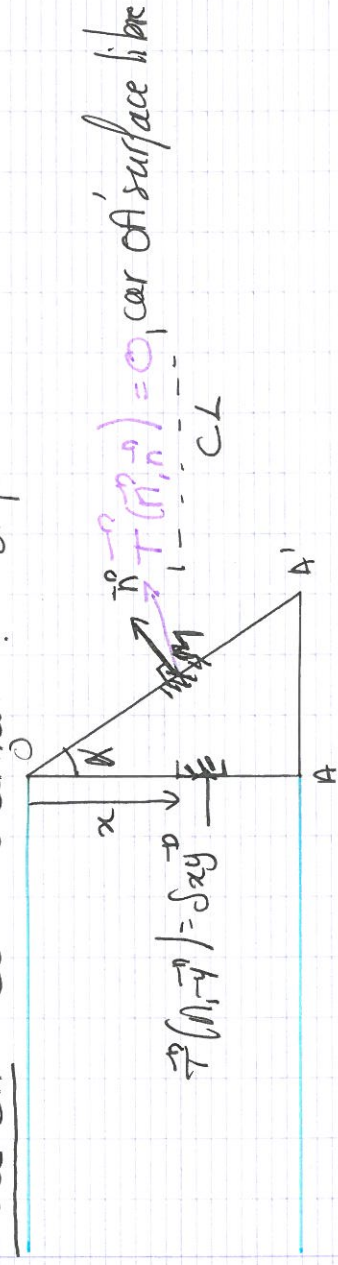
AP ①

$$\begin{aligned} \vec{T}(M, -y) &= Sx \vec{y}^p \quad (\text{Expresso littérale de la condition limite}) \\ &= [\sqrt{}] \cdot -\vec{y}^p = [\sqrt{}(x, 0)] \times -\vec{y}^p \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{x} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 10000x \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{T}(M(x, 0), -y) = 10000x \vec{y}^p = Sx \vec{y}^p$$

Donc CL est vérifié sur OA car $S=10000$.

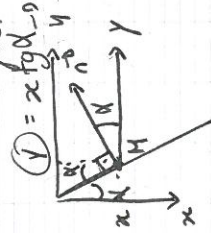
Face OA': Etat de contrainte? Surface libre = non-contrainte



$$\vec{T}(M, \vec{n}) = Sxy \vec{e}_x$$

$\vec{T}(M, \vec{n}) = 0$, car OA' surface libre

ok \Leftrightarrow Vérifier si $\vec{T}(M, \vec{n}) = [\sqrt{}] \cdot \vec{n} = \vec{0}$



$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \text{sur } OA' \text{ et } y = x \tan \alpha$$

$$\begin{aligned} \vec{T}(M, \vec{n}) = [\sqrt{}] \cdot \vec{n} &= \begin{bmatrix} 21000x - 143700 \tan \alpha \\ -46000x \tan \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} (21000x - 143700 \tan \alpha) \cdot -\sin \alpha - 46000 \cos \alpha \sin \alpha \\ 46000x \sin \alpha \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(21000 - 143700 \tan \alpha) \sin \alpha - 46000 \cos \alpha \sin \alpha \\ 46000x \tan \alpha \sin \alpha - 10000 \cos \alpha x \end{bmatrix}$$

$\approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Donc CL vérifiée.

Exercice 3 : Contraintes planes

En un point M de l'espace, autour duquel on mesure :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 40 \cdot 10^7 \text{ Pa} \\ \sigma_{yy} = 6 \cdot 10^7 \text{ Pa} \\ \sigma_{xy} = -2 \cdot 10^7 \text{ Pa} \end{cases}$$

1) Calculer les contraintes principales et les angles polaires par rapport à la direction \vec{x} des directions principales des contraintes

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

comme (x, y) plan principal $= 0$ $\beta = \alpha = \alpha$ = direction principale.

$$|\sigma - \lambda \text{Id}| = \begin{vmatrix} 10 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (10 - \lambda)(6 - \lambda) - 4$$

$$= 60 - 10\lambda - 6\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 16\lambda + 60$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 32$$

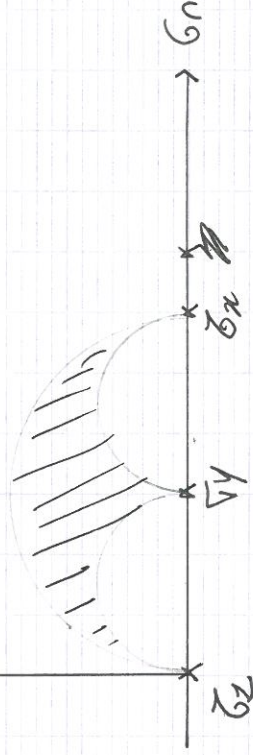
$$\lambda_1 = 8 + 2\sqrt{2} \quad \lambda_2 = 8 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} 8 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 8 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

$$\rightarrow \sigma_x = (8 + 2\sqrt{2}) \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

$$\rightarrow \sigma_y = (8 - 2\sqrt{2}) \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

Tous tracés avec signe de négatif.



TD
⑤

Directions principales : X ? $\vec{V} \cdot \vec{X} = \sqrt{x_x} \cdot \vec{X}$

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_x \\ y_x \end{bmatrix} = (8 + 2\sqrt{2}) \begin{bmatrix} x_x \\ y_x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x_x - 2y_x = (8 + 2\sqrt{2})x_x \\ -2x_x + 6y_x = (8 + 2\sqrt{2})y_x \end{cases}$$

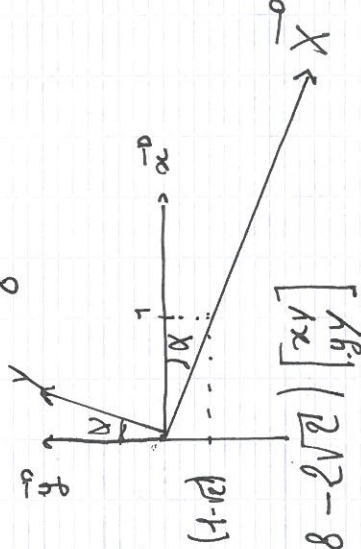
On cherche la relat° entre x et y_x
 \hookrightarrow on résout l'équation

$$\rightarrow (-1) (2 - 2\sqrt{2})x_x = 2y_x \Rightarrow y_x = (-1 - \sqrt{2})x_x \quad (\text{Vecteur propre})$$

\hookrightarrow pas unitaire

$K =$ angle polaire \vec{X}/x $\tan K = -1 - \sqrt{2}$
 $\Rightarrow K = \arctan(-1 - \sqrt{2}) \quad K = \frac{-\pi}{8}$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

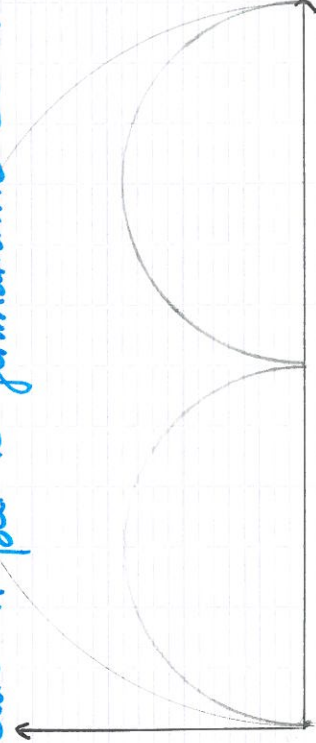


$$Y = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_x \\ y_x \end{bmatrix} = \sqrt{10} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} - 8 \\ 9 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_x \\ y_x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x_x - 2y_x = (8 - 2\sqrt{2})x_x \\ -2x_x + 6y_x = (8 - 2\sqrt{2})y_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2) Retrouver K par le formalisme de Mohr



$$\vec{T}(\Pi, \vec{x}) = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{car } |\vec{\sigma}| = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$\vec{\epsilon} = -\frac{d\vec{n}}{dx}$$

le point figuratif de l'état de contrainte

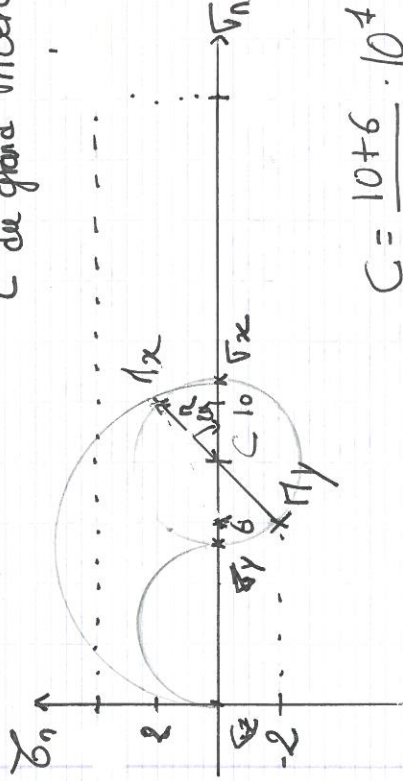
$$\rightarrow \sigma_n - \sqrt{2} = 10$$

$$\rightarrow \sigma_n \rightarrow \sigma_n = 10 + \sqrt{2}$$

le point figuratif de l'état de contrainte

$$t = -y$$

C du grand tricercle $(4 + \sqrt{2}) \cdot 10^4 \text{ Pa}$



$$C = \frac{10+6}{2} \cdot 10^4 \text{ Pa} = 8 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$R = 2\sqrt{2}$$

$$\sigma_x = C + R = (8 + 2\sqrt{2}) \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$\sigma_y = C - R = (8 - 2\sqrt{2}) \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$\vec{T}(\Pi, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(\Pi, \vec{y}^0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \sigma_n = \sigma_y = 6 \quad \sigma = -2$$

3) Valeur de la cisison (cisaillement) maximale

$$\tau_{\text{max}} = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{2} = (4 + \sqrt{2}) \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Valeur Numérique
 par un point
 ou par Π l solide
 si chips des contrainte
 uniforme

Rayon du \odot grad de 3 cercle de Mohr.

Exo 4: Ecrire le tenseur des contraintes en un point M , exprimé dans le repère $\{M, x, y, z\}$, sachant que:

- a) \rightarrow le plan $(M, \vec{x}^0, \vec{y}^0)$ est tangent à une surface libre de traction.
- b) \rightarrow la contrainte exercée sur la facette $(M, \vec{x}^0, \vec{y}^0)$ est tangentielle.
- c) \rightarrow $(M, \vec{y}^0, \vec{z}^0)$

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

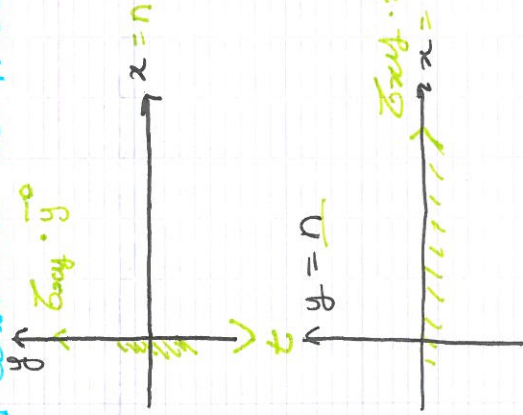
Expression sur la condition a) : $\vec{T}(M, \vec{z}^0) = [\underline{\sigma}] \vec{z}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Expression de la condition b) : $\vec{T}(M, \vec{y}^0) = [\underline{\sigma}] \vec{y}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
 \rightarrow tangential $\rightarrow \sigma_{yz} = 0$

Expression de la condition c) : $\sigma_{xz} = 0$

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Construire le trièdre de Mohr correspondant



$$\vec{T}(M, \vec{x}^0) = \underline{\sigma} \vec{x}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{T}(M, \vec{y}^0) = \underline{\sigma} \vec{y}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ 0 \\ \sigma_{zy} \end{bmatrix}$$

TD
4

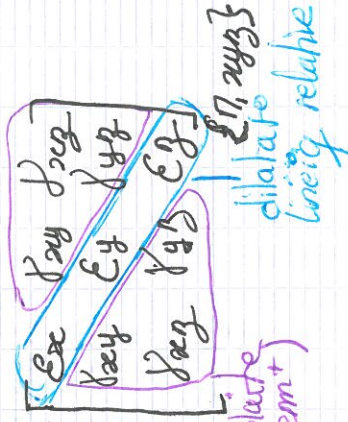
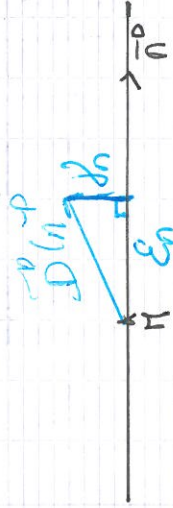
Exercice 1 Déformation Voir Feuille TD

$\vec{PP}_1(x, y, z) = \text{Champs de déplacement car } (x, y, z)$
 $= \begin{pmatrix} v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}$

$\rightarrow [\mathcal{E}] = \frac{1}{2} [\text{grad } \vec{PP}_1(x, y, z) + \text{grad } \vec{PP}_1^T] =$

Vecteur déformate $\vec{D}(n) = [\mathcal{E}]n \rightarrow$ orbite

Distor^o angulaire (glissement)



2.1) ① Déplacement des points selon e_j ↓ ↑ et $e_x \leftarrow \rightarrow$
Pas de distors^o angulaire

$[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x & \delta_{xy} \\ \delta_{xy} & \mathcal{E}_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

avec $\vec{PP}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \mathcal{E}_x$ Pas de distors^o angulaire $\rightarrow \delta_{xy} = 0$.

$\hookrightarrow [\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_y \end{bmatrix}$
 $\mathcal{E}_x = 0,105 (= \frac{24-19}{1}) \div 1,9$
 $\mathcal{E}_y = \frac{(1,8 - 1,8)}{-\text{après} - \text{avant}} \div \frac{2}{-0,1} = -0,1$

2.2) Cercles de Mohr

$u = 2kxy \quad v = k(7x^2 - 3y^2) \quad w = 0$

chips de déplacement \vec{U} \leftarrow $\vec{R} \vec{P}_1$

$$\begin{cases} u = 2kxy \\ v = h(7x^2 - 3y^2) \\ w = 0 \end{cases}$$

① $u \neq v + w \rightarrow$ déformable. \neq gradient de déplacement

Tenseur de déformation:

$$(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}} \vec{U} + \overline{\text{grad}}^T \vec{U}]$$

$$\overline{\text{grad}} \vec{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ky & 2kx & 0 \\ 14hx & -6hy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

~~(\mathcal{E}) =~~

$$\overline{\text{grad}}^T \vec{U} = \begin{bmatrix} 2ky & 14kx & 0 \\ 2kx & -6ky & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} 2ky & 8kx & 0 \\ 8kx & -6ky & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{x, y\}$$

\neq direct principale de déformation
 \hookrightarrow état plan

② $(\Omega) = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}} \vec{U} - \overline{\text{grad}}^T \vec{U}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -12kx & 0 \\ 12kx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{R} + \vec{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6kx \end{bmatrix}$$

$$= 6kx \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\hookrightarrow rotationnelle
 ∇ nabla \neq le chips
 \hookrightarrow recherche

③ Dilatation volumique relative

$$[\mathcal{E}] = 2k \begin{bmatrix} 4x & 4x & 0 \\ 4x & -3y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

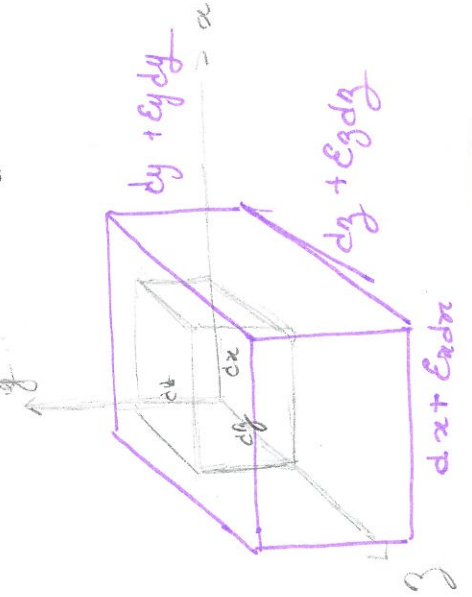
$$[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{xx} & \mathcal{E}_{xy} & \mathcal{E}_{xz} \\ \mathcal{E}_{xy} & \mathcal{E}_{yy} & \mathcal{E}_{yz} \\ \mathcal{E}_{xz} & \mathcal{E}_{yz} & \mathcal{E}_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\delta V}{V} = \mathcal{E}_{xx} + \mathcal{E}_{yy} + \mathcal{E}_{zz} = \text{tr}[\mathcal{E}] = \mathcal{E}_{ii}$$

⑧

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{V_{\text{final}} - V_{\text{initial}}}{V_{\text{initial}}} = \frac{(dx + \mathcal{E}_{xx} dx)(dy + \mathcal{E}_{yy} dy)(dz + \mathcal{E}_{zz} dz) - dx dy dz}{dx dy dz}$$

$$= \mathcal{E}_{xx} + \mathcal{E}_{yy} + \mathcal{E}_{zz} = \text{tr}[\mathcal{E}]$$



$$\frac{\delta V}{V} = \text{tr}[\mathcal{E}] = -4ky$$

4) \mathcal{E}_n ? avec $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ Composante du vec de def projete ds \vec{n}

$$D_{nn} = [\mathcal{E}] \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4x & -3y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \mathcal{E}_n \begin{bmatrix} \alpha y + 4x\beta \\ 4x\alpha - 3y\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

⚠ Rendre \vec{n} unitaire

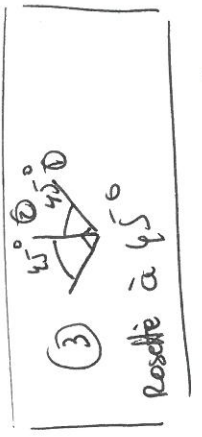
$$K_P \mathcal{E}_n = D_{nn} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \mathcal{E}_n (8K\beta x + (K^2 - 3\beta^2)y)$$

$$5) \vec{\delta}_n = D_{nn} - \mathcal{E}_n \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \quad \vec{\delta}_n = \mathcal{E} \vec{e}_i k y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

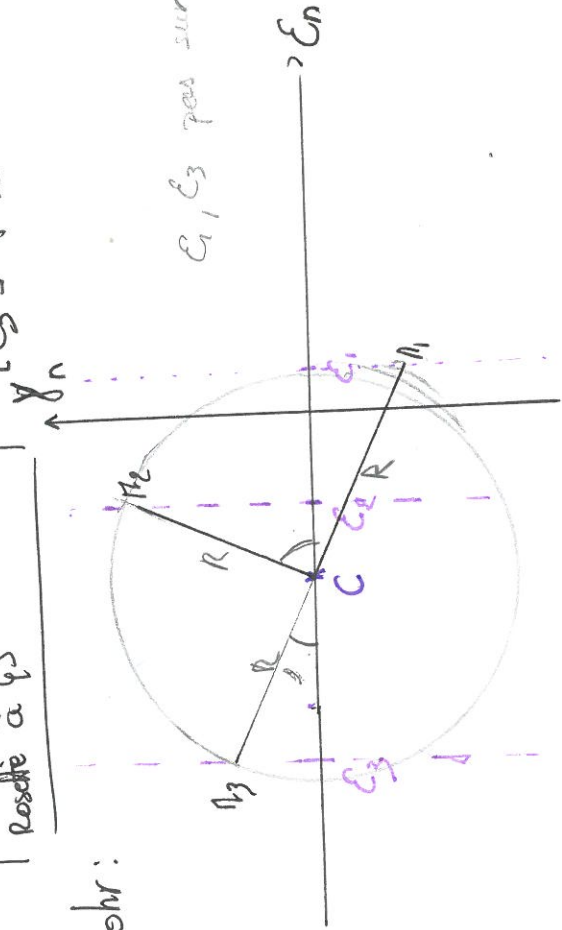
Direc° et deformation principales

$$\begin{cases} \mathcal{E}_I = 14ka \\ \mathcal{E}_{II} = -26ka \\ \mathcal{E}_{III} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_I = [2 \ 1 \ 0] \text{ (vecteur propre)} \\ V_{II} = [-1 \ 2 \ 0] \\ V_{III} = [0 \ 0 \ 1] \end{cases}$$

Exo 2.3 : Élément de réponse



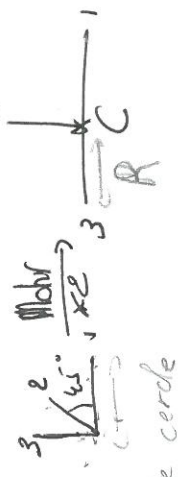
Mohr:



ϵ_1, ϵ_3 pas sur le cercle

$$\begin{cases} \epsilon_1 = 1 \cdot 10^{-3} \\ \epsilon_2 = -2 \cdot 10^{-3} \\ \epsilon_3 = -7 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

1 Cercle de Mohr en jauge ds le m plan.
 $C = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2} = -3$

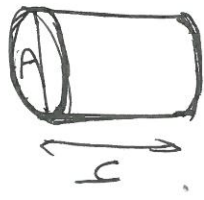


$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \epsilon_x &= (-3 + \sqrt{7}) \cdot 10^{-3} \\ \epsilon_y &= (-3 - \sqrt{7}) \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Exercice 3.2:

Loi de comportement $\sigma - \epsilon$: Loi de Hooké.

$$[\epsilon] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\sigma] [I]$$



Essai 1: Pression p appliquée sur He la surface extérieure.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -0,012 = \text{tr}(\epsilon) = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z$$

repère polaire

$$\text{Essai 2: } [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q \end{bmatrix} \quad \epsilon_y = -0,003 \quad q = 30 \text{ MPa cote de chaque cote}$$

Identifier ϵ et ν : On calcule ϵ via σ .

$$\begin{aligned} \rightarrow \epsilon_r &= \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_r - \frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) = \frac{1+\nu}{E} \times (-p) - \frac{\nu}{E} \times (-3p) \\ &= -\frac{p}{E} + \frac{3\nu}{E} p = -\frac{p}{E} (1 - 2\nu) \end{aligned}$$

$$\epsilon_r = \epsilon_\theta = \epsilon_z = -\frac{p}{E} (1 - 2\nu)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -0,012 = \text{tr}[\epsilon] = \frac{-3p}{E} (1 - 2\nu) = -0,012$$

$$\epsilon_z = \frac{1+\nu}{E} x - q - \frac{\nu}{E} x - q = -\frac{q}{E} = \epsilon_z = -0,003$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{0,003} = \frac{30 \cdot 10^6}{0,003} = 10 \text{ GPa} = G$$

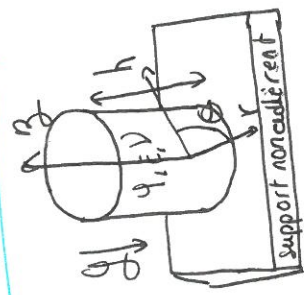
$\hookrightarrow \nu = 0,23$

Calculer la variation du diamètre (Essai 2)

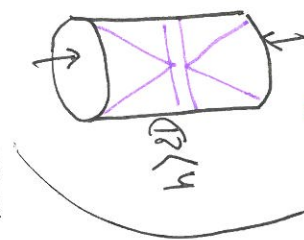
$$\epsilon_r = \frac{1+\nu}{E} x \sigma_r - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) = +\frac{\nu}{E} q$$

$$\Delta D = \epsilon_r \times A$$

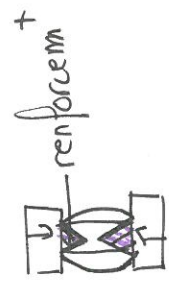
Exercice surprise : Calculer le tassement du cylindre sous l'effet de son propre poids: Δh .



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_r & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\phi} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\phi} \\ \sigma_{\phi r} & \sigma_{\phi\theta} & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$



$h \ll D$ de résistance sur les petits cercles

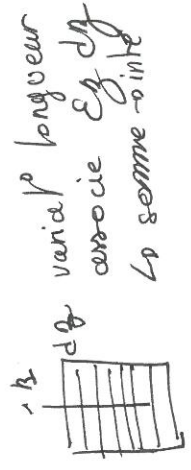


$$\sigma_z(r) = -\frac{\rho g s (h-r)}{3}$$

$$\sigma_z(r) = -\frac{\rho g (h-r)}{3}$$

$$\epsilon_z = \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_z - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) = \frac{-\rho g (h-r)}{E}$$

$$\Delta h = \int_0^h \epsilon_z dy = -\frac{\rho g h^2}{2E}$$



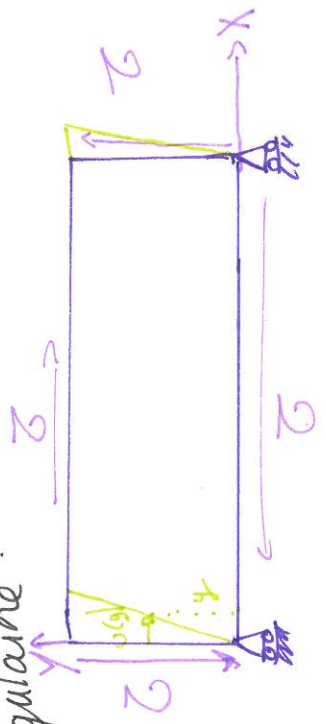
Précis° sur TD B

Exercice 3.1

Plaque rectangulaire :

$$CL : \begin{cases} u(0,0,z) = 0 \\ v(n,y,0) = 0 \\ w(n,y,0) = 0 \end{cases}$$

condition aux limites (on applique pas grad dessus).



1) Tenseur de contrainte: $[\sigma] =$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{T}(M, \vec{x}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

2) Tenseur de déformat pure $[\epsilon]$

$$[\epsilon] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\sigma][I] - p[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{1+\nu}{E} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\nu}{E} \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \sigma_z \end{bmatrix}$$

3) Champs de déplacement

$$[\epsilon] = \frac{1}{2} [\text{grad } \vec{U} + \text{grad } \vec{U}^T]$$

$$\text{avec } \vec{U} = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \epsilon_{xx} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \textcircled{6} \epsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0$$

$$\textcircled{2} \epsilon_{yy} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \textcircled{5} \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] = 0$$

$$\textcircled{3} \epsilon_{zz} = 0 = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \textcircled{6} \epsilon_{zx} = 0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 0$$

$$\textcircled{4} = 0 \quad \textcircled{5} \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\textcircled{6} = 0 \quad \textcircled{6} \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\textcircled{3} = 0 \quad \textcircled{3} \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\textcircled{4} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \tau \frac{(1+\nu)}{E} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Intégration par rapport à x $\int \frac{\partial v}{\partial x} dx = v(x, y, z) = \left[2 \tau \frac{(1+\nu)}{E} x - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \cdot x + A(y, z)$

$\bullet v(x, y, 0) = 0 \Rightarrow v(x, y, 0) = 0$
 $\hookrightarrow v(0, 0) = A(z=0) = 0$ Constante

$$\Rightarrow v(x, y, 0) = \left[2 \tau \frac{(1+\nu)}{E} x - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \cdot x = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \tau \frac{(1+\nu)}{E} x$$