Cours de remise à niveau Maths 2ème année

Intégrales simples

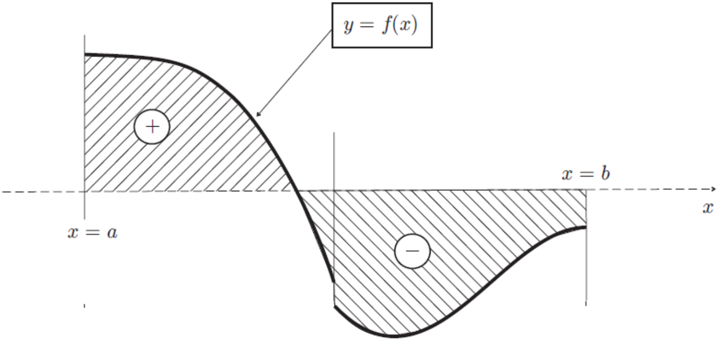
C. Maugis-Rabusseau
GMM Bureau 116
cathy.maugis@insa-toulouse.fr

Plan

Sommaire

Introduction

Intuitivement la notion d'intégrale correspond à l'*aire algébrique* comprise entre le graphe d'une fonction, l'axe des x et deux droites parallèles à l'axe des y.



Définitions

On parle d'**intégrale simple d'une fonction f** lorsque :

- l'intervalle d'intégration est un **segment** $[a, b]$ (intervalle fermé borné) ;
- la fonction f est **définie**, sauf peut être en un **nombre fini de points** de $[a, b]$,
- la fonction f est **bornée** sur $\mathcal{D}_f \cap [a, b]$, c'est-à-dire

$$\exists M \in \mathbb{R}; \forall x \in \mathcal{D}_f \cap [a, b], |f(x)| \leq M.$$

On dira que $f \in \mathcal{B}([a, b])$ pour désigner une fonction ayant ces propriétés.

Définition

On dit que f est **intégrable** sur $[a, b]$ si $\int_a^b f(x)dx < +\infty$. On note

$\mathcal{I}([a, b])$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{B}([a, b])$ intégrable sur $[a, b]$.

Sommaire

Relation de Chasles

Théorème

Soit $f \in \mathcal{B}([a,b])$ et $c \in]a,b[$.
Soit $f_1 = f|_{\mathcal{D}_f \cap [a,c]}$ et $f_2 = f|_{\mathcal{D}_f \cap [c,b]}$.
$f \in \mathcal{I}([a,b])$ si et seulement si $f_1 \in \mathcal{I}([a,c])$ et $f_2 \in \mathcal{I}([c,b])$.
De plus, on a dans ce cas

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Remarque

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Opérations

1. Si f et $g \in \mathcal{I}([a,b])$ alors $f+g \in \mathcal{I}([a,b])$ et
$$\int_a^b f(x)+g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$
2. Si $f \in \mathcal{I}([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f \in \mathcal{I}([a,b])$ et
$$\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx.$$
3. Soit $f \in \mathcal{I}([a,b])$. Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$.
4. Soient $f, g \in \mathcal{I}([a,b])$. Si $f \geq g$ alors $\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx$.
5. Si $f \in \mathcal{I}([a,b])$ alors $|f| \in \mathcal{I}([a,b])$ et on a l'inégalité :
$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Opérations

Remarque

Attention, contrairement à l'addition, l'intégrale d'un produit, n'est pas égale en général au produit des intégrales.

Comparez $\displaystyle\int_0^5 2\pi dx$ et $\displaystyle\left(\int_0^5 2dx\right)\left(\int_0^5 \pi dx\right)$.

Sommaire

Fonctions monotones

Définition

On appelle **taux d'accroissement** de f, le quotient défini pour tout $x \neq y \in I$ et dans le domaine $\mathcal{D}_f$, par $[f(x) - f(y)] / (x - y)$.
On dit qu'une fonction f, définie sauf peut être en un nombre fini de points d'un intervalle I, est **monotone** sur I si son taux d'accroissement reste de signe constant.
La fonction est **croissante** si son taux d'accroissement reste ≥ 0 et **décroissante** s'il reste ≤ 0.

Théorème

Si $f \in \mathcal{B}([a, b])$ et est monotone sur $]a, b[$ alors $f \in \mathcal{I}([a, b])$.

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{B}([a, b])$.
Si f est monotone par morceaux sur $]a, b[$ alors $f \in \mathcal{I}([a, b])$.

Fonctions continues

Théorème

Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Corollaire

Soit f définie sauf au plus en un nombre fini de points d'un segment $[a, b]$. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors $f \in \mathcal{I}([a, b])$.

Proposition

Soit f continue sur $[a, b]$. Si $\forall x \in [a, b]\,, f(x) \geq 0$ et $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ alors

$$\forall x \in [a, b]\,, f(x) = 0, \ .$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition

Si f et g sont dans $\mathcal{I}([a,b])$ alors fg, f^2 et g^2 sont dans $\mathcal{I}([a,b])$ et on a

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}\,\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\,dx}.$$

Sommaire

Premier théorème de la moyenne

Théorème

Si f et g sont dans $\mathcal{I}([a,b])$ et si, $\forall x \in [a,b], g(x) \geq 0$, alors il existe K vérifiant

$$m = \inf_{x \in [a,b] \cap \mathcal{D}_f} f(x) \leq K \leq M = \sup_{x \in [a,b] \cap \mathcal{D}_f} f(x)$$

tel que

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = K \int_a^b g(x)\, dx.$$

En particulier, si g est la fonction constante à 1, on a

$$\int_a^b f(x)\, dx = K(b-a).$$

Premier théorème de la moyenne

Corollaire

Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et si, $\forall x \in [a, b], g(x) \geq 0$, alors il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

En particulier si $g = 1$, $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)$.

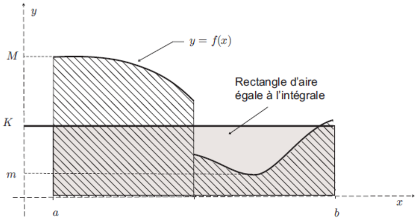
Premier théorème de la moyenne

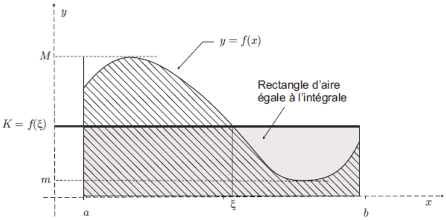
Remarque

Si $g = 1$ et $f \geq 0$, le 1[er] théorème de la moyenne exprime qu'il existe un rectangle de base $b - a$ et de hauteur K

$$m = \inf_{x \in [a,b]} \leq K \leq M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

dont l'aire est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.





Premier théorème de la moyenne

Exemple

Soit a un réel strictement positif. Calculez $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^{3a}\frac{\cos x}{x}\,dx$.

Sommaire

Intégrale et primitive

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $a \in I$. On suppose que f est une fonction définie sur I et que pour tout $x \in I$, f est intégrable sur $[a, x]$ si $x > a$ et sur $[x, a]$ si $x < a$.

Définition

On appelle **primitive** d'une fonction f sur I une fonction F, dérivable sur I telle que pour tout x dans I, $F'(x) = f(x)$.

On a **le théorème fondamental du calcul intégral** suivant qui montre que

- une fonction continue admet toujours une primitive
- l'intégrale d'une fonction f peut se calculer à l'aide d'une primitive F de f.

Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème

Si I est un intervalle non vide et non réduit à un point et si $f \in \mathcal{C}^0(I)$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\forall a \in I$, la fonction G_a définie sur I par
$$x \longmapsto G_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie $\forall x \in I\,,\, G_a'(x) = f(x)$
(autrement dit, G_a est **la** primitive de f sur I qui s'annule en a).
2. si F est une primitive quelconque de f sur I alors $F - G_a$ est égale à une constante et
$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt = F(a) + \int_a^x F'(t)dt\,, \quad \forall x \in I.$$

Théorème fondamental du calcul intégral

Remarque

Par abus de notation, on écrit parfois $\int f(x)dx$ pour désigner une primitive F de f, sans préciser la constante d'intégration ou le point où s'annule cette primitive F.

Remarque

Si on choisit $x = b \in I$, on a $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$,
la quantité $F(b) - F(a)$ est l'**accroissement** de F entre a et b.
Il est aussi noté des deux façons suivantes

$$[F]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Intégrale et primitive

Si on suppose juste que la fonction f est intégrable sur I et pas nécessairement continue sur I, alors pour tout $a \in I$, la fonction G_a définie sur I par

$x \mapsto G_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est continue sur I mais peut ne pas être dérivable comme le montre le théorème suivant.

Intégrale et primitive

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $a \in I$. On suppose que f est une fonction définie sur I sauf éventuellement en un nombre fini de ses points et que pour tout $x \in I$, f est intégrable sur $[a, x]$ si $x > a$ et sur $[x, a]$ si $x < a$. Alors la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad (x \in I)$$

est continue sur I.

C'est donc bien la continuité de f au voisinage de $x_0 \in I$ qui assure que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est dérivable au voisinage de $x_0 \in I$.

Sommaire

Intégration par parties

Théorème

Soit u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

où $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$ désigne l'accroissement de la fonction uv entre a et b.

Exemple

Calculez la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

Changement de variable

Théorème

Si f est une fonction continue sur un intervalle J et si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans J, alors pour a et b dans J,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Exemple

Calculez les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \text{et} \quad \int_1^e \frac{\ln(x)^2}{x} dx.$$

Changement de variable

Théorème

Soit $f \in \mathcal{I}([c,d])$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur $[a,b]$ telle $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$.
On a alors $x \mapsto f(\varphi(x))\varphi'(x) \in \mathcal{I}([a,b])$ et

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_c^d f(y)\,dy.$$

(On a un énoncé et un résultat analogue si φ est strictement décroissante.)

Tableau récapitulatif des primitives usuelles

$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k \text{ si } m \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln(\lvert x \rvert) + k$
$\int e^x dx = e^x + k$	$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + k$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + k$	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + k$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + k$	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\frac{1}{\tan(x)} + k$
$\int \mathrm{ch}(x) dx = \mathrm{sh}(x) dx + k$	$\int \mathrm{sh}(x) dx = \mathrm{ch}(x) dx + k$
$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} dx = \mathrm{th}(x) + k$	$\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)} dx = -\frac{1}{\mathrm{t}h(x)} + k$
$\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{Arctan}(x) + k$	$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \lvert \frac{x-1}{x+1} \rvert + k$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{Argsh}(x) + k$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{Argch}(x) + k$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}(x) + k$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arccos}(x) + k$

Primitives des fonctions rationnelles

Le tableau précédent fournit les primitives de quelques fonctions rationnelles usuelles.
On va chercher à se ramener à ces situations connues par changement de variable ou intégration par parties.
La première étape consiste toujours à décomposer la fonction en éléments simples. N'apparaissent alors plus que des polynômes ou des termes de la forme

$$\frac{1}{(x-a)^n} \text{ et } \frac{a\,x+b}{(x^2+p\,x+q)^n} \text{ avec } p^2-4\,q<0.$$

Exemple 1

Déterminons les primitives de la fonction

$$x \mapsto f(x) = \frac{x+2}{(x-1)\,(x+3)^3}$$

La décomposition en éléments simples de f vaut :

$$f(x) = \frac{3}{64\,(x-1)} - \frac{3}{64\,(x+3)} - \frac{3}{16\,(x+3)^2} + \frac{1}{4\,(x+3)^3}.$$

On obtient donc

$$\int f(x)\,dx = \frac{3}{64} \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right) + \frac{3}{16\,(x+3)} - \frac{1}{8\,(x+3)^2} + c.$$

Exemple 2

Soit la fonction $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x\,(x^2+x+1)^2}$.
Sa décomposition en éléments simples vaut :

$$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{(x^2+x+1)^2}.$$

On a donc

$$\int g(x)dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx - \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx.$$

Exemple 2

Pour les deux dernières primitives, on remarque que

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left[\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1\right],$$

ce qui conduit à faire le changement de variable $t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$.
On a donc $x^2+x+1=\frac{3}{4}(t^2+1)$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$ et $x+1=\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx=\int\frac{t\,dt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{\sqrt{3}\,(t^2+1)},$$

et

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\int\frac{8\sqrt{3}}{9}\,\frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Exemple 2

On peut alors calculer d'une part

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{t\,dt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{\sqrt{3}\,(t^2+1)} \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}(t) + k, k \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right) + k,
\end{aligned}$$

$k \in \mathbb{R}$.

Exemple 2

D'autre part, calculons $I = \int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt$.

Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\, dt &= \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\, dt + \int \frac{-t^2}{(t^2+1)^2}\, dt. \\
&= \int \frac{1}{(t^2+1)}\, dt + \int \frac{-t^2}{(t^2+1)^2}\, dt. \\
&= \mathrm{Arctan}(t) + \int \frac{-t^2}{(t^2+1)^2}\, dt + k, k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemple 2

Le second terme se traite comme suit

$$\int \frac{-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \int u(t)v'(t)\,dt$$

avec $u(t) = t/2$ et $v'(t) = \dfrac{-2t}{(t^2+1)^2}$ avec u et v de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme $v(t) = \dfrac{1}{(t^2+1)}$, une IPP donne

$$\begin{aligned}\int \frac{-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt &= \frac{1}{2}\frac{t}{(t^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t^2+1)}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{t}{(t^2+1)} - \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(t) + k,\ k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple 2

Ainsi, $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{t}{2\,(t^2+1)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(t) + k,\, k \in \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx &= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left\{\frac{t}{2\,(t^2+1)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(t)\right\} + k \\
&= \frac{2x+1}{3\,(x^2+x+1)} + \frac{4\,\sqrt{3}}{9}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right) + k,\, k
\end{aligned}$$

Finalement, une primitive de g est donnée par

$$\begin{aligned}
\int g(x)\,dx &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{2x+1}{3\,(x^2+x+1)} \\
&\quad - \frac{7\,\sqrt{3}}{9}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right) + k,\, k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Polynômes en $\sin(x)$, $\cos(x)$

On cherche des primitives de la forme $I_{n,m}(x) = \int \sin^n(x) \cos^m(x)\,dx$ où m et n sont des entiers naturels. La méthode dépend de la parité de n et m :

- si n **ou** m est impair :
  si $n = 2p+1$, $\sin^{2p+1}(x) = [1-\cos^2(x)]^p \sin(x)$, et

  $$I_{n,m}(x) = \int [1-\cos^2(x)]^p \cos^m(x) \sin(x)\,dx.$$

  On pose alors $t = \cos(x)$, de sorte que $dt = -\sin(x)\,dx$ et

  $$I_{n,m}(x) = -\int [1-t^2]^p\, t^m\, dt.$$

  Si $m = 2q+1$, c'est $t = \sin(x)$ que l'on doit poser.

- si n **et** m sont pairs :
  on peut linéariser l'expression $\sin^{2p}(x)\cos^{2q}(x)$.

  Exemple : Pour le calcul de $I_{2,4}$, on peut procéder de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
I_{2,4}(x) &= \int \cos^2(x)[\cos(x)\ \sin(x)]^2 dx, \\
&= \int \frac{1}{2}\,[\cos(2x)+1]\ \frac{1}{4}\ \sin^2(2x)\,dx, \\
&= \frac{1}{8}\int \cos(2x)\ \sin^2(2x)\,dx + \frac{1}{16}\int [1-\cos(4x)]\,dx.
\end{aligned}$$

  On est ramené au cas précédent pour le calcul de la première primitive.

Fractions en $\sin(x)$ et $\cos(x)$: Règles de Bioche

La règle consiste à regarder quel changement de variable laisse $f(x)\,dx$ invariant.

- lorsque $f(x)\,dx$ est invariant par le changement de variable $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$,
- lorsque $f(x)\,dx$ est invariant par le changement de variable $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$,
- lorsque $f(x)\,dx$ est invariant par le changement de variable $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$,
- lorsque $f(x)\,dx$ n'est invariant par aucun des changements de variable précédents, on utilise l'expression de $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour obtenir leur représentation rationnelle :

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Exemple 1

$$T_1(x) = \int f(x)dx \text{ avec } f(x) = \frac{1}{\sin(x) + \sin(2x)}.$$

$f(x)dx$ est invariant par le changement $x \mapsto -x$; on pose $t = \cos x$, et donc $dt = -\sin x dx$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin(x) + \sin(2x)} &= \int \frac{-\sin(x)}{-\sin^2(x) - \sin(x)\left[2\sin(x)\cos(x)\right]}dx,\\
&= \int \frac{-\sin(x)}{-\sin^2(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)}dx,\\
&= \int \frac{-\sin(x)}{\cos^2(x) - 1 - 2\cos(x)[1 - \cos^2(x)]}dx,\\
&= \int \frac{1}{t^2 - 1 - 2t(1 - t^2)}dt,
\end{aligned}$$

Exemple 1

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin(x)+\sin(2x)} &= \int \frac{1}{t^2-1-2t(1-t^2)}dt,\\ &= \int \frac{1}{(t-1)(t+1)(2t+1)}dt,\\ &= \int \frac{1}{6}\frac{dt}{t-1} + \int \frac{1}{2}\frac{dt}{t+1} - \int \frac{2}{3}\frac{2dt}{2t+1},\end{aligned}$$

Par suite,

$$T_1(x) = \frac{1}{6}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{2}{3}\ln|2t+1| + k, k \in \mathbb{R}$$

et, en revenant à la variable x :

$$T_1(x) = \frac{1}{6}\ln|\cos(x)-1| + \frac{1}{2}\ln|\cos(x)+1| - \frac{2}{3}\ln|2\cos(x)+1| + k, k \in$$

Exemple 2

Calculons $T_2(x) = \int \frac{dx}{2+\sin(x)}$.

$\frac{dx}{2+\sin(x)}$ n'étant invariant par aucun des trois changements de variable élémentaires, on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ donc $dx = \frac{2dt}{(1+t^2)}$ et $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= \int \left(\frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\right) \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}(u) + k, k \in \mathbb{R} \text{ avec } \quad u = \frac{2}{\sqrt{3}}(t+1/2) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right) + k, k \in \mathbb{R} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) + k, k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Fonctions hyperboliques

Cette fois on s'intéresse aux fonctions du type $f(x) = F(\text{ch}(x),\ \text{sh}(x))$.
Pour calculer $\displaystyle\int F(\text{ch}(x), \text{sh}(x))dx$, on examine $\displaystyle\int F(\cos x, \sin x)dx$.

- Si $\displaystyle\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ se calcule avec $t = \cos x$ alors $\displaystyle\int F(\text{ch}(x),\ \text{sh}(x))dx$ se calcule avec $t = \text{ch}x$.
- Si $\displaystyle\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ se calcule avec $t = \sin x$ alors $\displaystyle\int F(\text{ch}(x),\ \text{sh}(x))dx$ se calcule avec $t = \text{sh}x$.
- Si $\displaystyle\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ se calcule avec $t = \tan x$ alors $\displaystyle\int F(\text{ch}(x),\ \text{sh}(x))dx$ se calcule avec $t = \text{th}x$.
- Si $\displaystyle\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ se calcule avec $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ alors $\displaystyle\int F(\text{ch}(x),\ \text{sh}(x))dx$ peut se calculer avec $t = \mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)$, mais il est préférable d'utiliser le changement $t = e^x$.

Exemple 1

Calculons $H_1(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(2x)}$.
D'après l'étude de T_1, il faut poser $t = \mathrm{ch}(x)$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(2x)} &= \int \frac{\mathrm{sh}(x)dx}{\mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{sh}(x)[2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)]} \\
&= \int \frac{\mathrm{sh}(x)dx}{\mathrm{sh}^2(x) + 2\mathrm{sh}^2(x)\mathrm{ch}(x)} \\
&= \int \frac{\mathrm{sh}(x)dx}{\mathrm{ch}^2(x) - 1 + 2\mathrm{ch}(x)[\mathrm{ch}^2(x) - 1]} \\
&= \int \frac{dt}{t^2 - 1 + 2t(t^2 - 1)} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)(2t+1)} \\
&= \int \frac{1}{6}\frac{dt}{t-1} + \int \frac{1}{2}\frac{dt}{t+1} - \int \frac{2}{3}\frac{2dt}{2t+1}.
\end{aligned}$$

Exemple 1

Donc

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \frac{1}{6}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{2}{3}\ln|2t+1| + k, k \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{6}\ln|\mathrm{ch}(x)-1| + \frac{1}{2}\ln|\mathrm{ch}(x)+1| - \frac{2}{3}\ln|2\mathrm{ch}(x)+1| + k, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple 2

Calculons $H_2(x) = \int \frac{dx}{\mathrm{ch}(x) + 2\mathrm{sh}(x)}$.
On n'observe aucune invariance. On pose $t = e^x$, $dt = t\,dx$.

$$\begin{aligned}
H_2(x) &= \int \frac{dx}{\frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}} = \int \frac{e^x}{\frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}}dx \\
&= \int \frac{dx}{\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \frac{t - \frac{\sqrt{3}}{3}}{t + \frac{\sqrt{3}}{3}} \right| + k, k \in \mathbb{R} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \frac{e^x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{e^x + \frac{\sqrt{3}}{3}} \right| + k, k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$