Algèbre linéaire : Espaces Vectoriels

Exercice 1

sev : "sous espace vectoriel"

1.) i) E_1 est un sev de $\mathbb{R}^2$

- $(0;0) \in E$ car $0 + 2\times 0 = 0$
- Soient $X = (x_1;x_2)$ et $Y = (y_1;y_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$X + \lambda Y = (x_1 + \lambda y_1 ; x_2 + \lambda y_2)$

$(x_1 + \lambda y_1) + 2(x_2 + \lambda y_2) = (x_1 + 2x_2) + \lambda(y_1 + 2y_2) = 0$

ii) E_2 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$.

$(1;1;\sqrt{2})$ et $(1;1;-\sqrt{2}) \in E_2$

mais $(1;1;\sqrt{2}) + (1;1;-\sqrt{2}) = (2;2;0) \notin E_2$

iii) E_3 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$: $(0,0,0) \notin E_3$

(iv) E_4 sev de $\mathbb{R}^4$ (preuve : cf E_1)

(v) E_5 sev de $\mathbb{R}^4$ (———)

(vi) E_6 n'est pas un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car $f = 0 \notin E_6$

(vii) E_7 sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

2°) (i) Soit $X \in E_1$ alors $x = -2y$ et $X = y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$

D'où $E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\dim E_1 = 1$

(iv) Soit $X = (x,y,z,t)^T \in E_4$ alors $x = 2t$

$$X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t\\y\\z\\t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

D'où $E_4 = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$ et $\dim E_4 = 3$.

(v) Soit $X = (x, y, z, t)^T \in E_5$ $\begin{cases} y = z = 0 \\ 2x - t = 0 \end{cases}$

Donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc $E_5 = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$ et $\dim E_5 = 1$

3) Montrons que $E_4 \cap E_5 = \{0\}$

Soit $X = (x; y; z; t)^T \in E_4 \cap E_5$ alors

$$\begin{cases} x - 2t = 0 \\ y = z = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = z = 0 \\ 2x = t \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = t = 0$$

D'où E_4 et E_5 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

On en déduit en particulier (argument de dimension) que

$$\mathbb{R}^4 = E_4 \oplus E_5$$

4) Il suffit de trouver un vecteur non colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

et tel que $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 1 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

Il suffit de choisir $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1\. $E_1 = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA \}$

Mq E_1 sev de $M_n(\mathbb{R})$

(i) $M = O_{M_n(\mathbb{R})}$ verifie $AM = MA = O_{M_n(\mathbb{R})}$

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, N \in M_n(\mathbb{R})$

Alors $A(M+\lambda N) = AM + \lambda AN$

$= MA + \lambda NA = (M+\lambda N)A$.

D'où $M+\lambda N \in E_1$

On déduit que E_1 sev de $M_n(\mathbb{R})$

2°) a) $M_0^2 = \mathbb{1}$ et on a bien $A \mathbb{1}d = \mathbb{1}d A = A$

d'où $M_0 \in E_2$

b) $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M_1^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AM_1^2 = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M_1^2 A = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3

$G = \{ P \in \mathbb{R}[X] \ / \ 0 \text{ racine double} \}$

$= \{ X^2 Q(X) \ / \ Q \in \mathbb{R}[X] \}$

On en dedut aisement que G sev de $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in F \cap G$ $\quad P(X) = aX + b$ et 0 racine double

donc $P(0) = P'(0) = 0$ soit $a = b = 0$ d'où $F \cap G = \{0\}$

Ensuite si $P \in \mathbb{R}[X]$ $\quad P(X) = \underbrace{a_0 + a_1 X}_{\in F} + \underbrace{X^2 (a_2 + a_3 X + \dots + a_n X^{n-2})}_{\in G}$

d'où $\mathbb{R}[X] \subset F + G$.

Applications linéaires et Matrices

Exercice 1

- $f_1 ; f_4 ; f_5 ; f_6 ; f_7$ sont linéaires
- $f_2(0,0,0) = 1 \neq 0$ f_2 non linéaire
- $f_3(0,0,1;0) = (0;1;1)$

$f_3(0;0;-1;0) = (0;1;-1) \neq -f_3(0,0,1,0)$

D'où f_3 non linéaire.

$\mathrm{Ker}\, f_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \mathrm{Im}\, f_1 = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathrm{Ker}\, f_4 = \{ X\, Q(X), Q \in \mathbb{R}[X] \}$ $\quad \mathrm{Im}\, f_4 = \mathbb{R}$

$\mathrm{Ker}\, f_5 = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \,/\, X ; X-2 ; X-4 \text{ divise } P \}$

$= \mathrm{Vect} \{ X(X-2)(X-4) \}$

$\mathrm{Im}\, f_5 = \mathbb{R}^3$. Pour demontrer ce resultat, on choisit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ et on cherche $P \in \mathbb{R}_3[X]$ /

$P(0) = a \quad P(2) = b \quad P(4) = c$

On prend la base de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$1 ; X ; X(X-2) ; X(X-2)(X-4)$

et on cherche $P = \alpha \times 1 + \beta \times X + \gamma X(X-2) + \delta X(X-2)(X-4)$

On a $P(0) = \alpha = a$

$P(2) = \alpha + 2\beta = b$ $\Rightarrow$ admet une solution

$P(4) = \alpha + 4\beta + 8\gamma = c$ unique. δ est libre.

$\operatorname{Ker} f_6 = \{0\}$: un polynôme non nul de degré 2 a au plus 2 racine. Si $P \in \operatorname{Ker} f_6$ alors $\deg P \leq 2$ ET P a 3 racines donc $P = 0$

$\operatorname{Im} f_6 = \mathbb{R}^3$ (cf cas f_5).

Soit $P \in \operatorname{Ker} f_7$ Alors $P(\pm i) = 0$ donc X^2+1 divise P. d'où

$$P(X) = (\alpha X + \beta)(X^2+1) \quad \text{car} \quad \deg P \leq 3$$

On a aussi $P'(0) = 0$

Or $P'(X) = 2X(\alpha X + \beta) + (X^2+1)\alpha$

$P'(0) = \alpha = 0$ Ainsi $P(X) = \beta(X^2+1)$

$\operatorname{Ker} f_7 = \operatorname{Vect}(X^2+1)$ $\dim \operatorname{Ker} f_7 = 1$

~~On a~~ ~~compa~~ D'où, $\dim \operatorname{Im} f_7 = 4 - 1 = 3$

$f_7(1) = x$

$f_7(x) = -1$

$f_7(x^2) = -f_7(1) = -x$

$$f_7(x^3) = x^4 - 3x^2(x^2+1)$$
$$= x^2(x^2 - 3x^2 - 3) = -x^2(2x^2+3)$$

$\operatorname{Im} f_7 = \operatorname{Vect}\{1 ; x ; x^2(2x^2+3)\}$.

Matrice associée : $A_i = \mathrm{Mat}(f_i)$ $i=1,5,6,7$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 2</u>

1) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2°) On a $\det(A) = 2a$ donc si $a \neq 0$, A inversible d'où $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^3$

Si $a = 0$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A$ si et seulement si

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y = 3z \end{cases} \quad \begin{matrix} x = -2z \\ y = 5z \end{matrix} \quad \text{D'où } \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

On a $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$

3°) $a \neq 0$

4°) Montrons que $(v_1; v_2; v_3)$ libre : soit $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

Alors $\begin{cases} \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \gamma = \alpha = \beta = 0$ d'où $(v_1; v_2; v_3)$ libre, de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ c'est une base.

(b) Soit $V = (v_1 ; v_2 ; v_3)$ alors

$$AV = VB \quad B \text{ Matrice de } f \text{ dans } V$$

Autrement dit $B = V^{-1}AV$.

(c) On a $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 1 \times v_3 + 1 \times v_2 + 0 \times v_1$

D'où $u = (0 ; 1 ; 1)_{\mathcal{V}}$

<u>Exercice 3</u> On assimile $M_2(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^4$ via l'application

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

1.) f linéaire : cf ex 2, question 1 (espaces vectoriels)

$$B = \mathcal{M}at(f ; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base} \\ \text{canonique}}}{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit $(a ; b ; c ; d)^T \in \operatorname{Ker} B$.

$$\begin{cases} -a + 2b = 0 \\ -c + 2d = 0 \\ a - 2b = 0 \\ c - 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = 2b \\ c = 2d \end{matrix}$$

$$\operatorname{Ker} B = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right]$$

<u>Matriciellement</u> $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\right]$.

D'où $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f = 2$

On a $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$ <u>et</u> libres

D'où $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

$$= \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ -a & -c \end{pmatrix} \; ; \; a ; c \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3) $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$ si et seulement

si $\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \delta = 0 \end{cases}$

Dans ce cas $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ convient.

4°) $\alpha = -1 \quad \beta = 2$ dans la question 3.

<u>Exercice 4</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Soit $X = (x; y; z)^T \in \operatorname{Ker} A$ alors $2x = y + z$
$3x = y + z$

D'où $x = 0$ et $y + z = 0$

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim \operatorname{Ker} A = 1$$

D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(A) = 2$ et donc $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

2°) (a) Montrons que $(v_1;v_2;v_3)$ famille libre de $\mathbb{R}^3$: soit $(\alpha;\beta;\gamma) \in \mathbb{R}^3$ t.q $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors
$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Ainsi $(v_1 — v_3)$ base de $\mathbb{R}^3$. On raisonne de même pour $(\nu_1;\nu_2)$

(b) On a
$$A v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \nu_1$$
$$A v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \nu_2$$
$$A v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \nu_1 - \nu_2$$

D'où
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) On résout
$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 3 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 5 \end{cases}$$

D'où $x = (-2; -2; 5)_{\mathcal{B}}$

(d) On a $A(3v_1 + 2v_2) = 3\nu_1 + 2\nu_2$

$$3v_1 + 2v_2 = (3;2;3)$$

D'où $x = (3;2;3) + \mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 5

1) Trivial.

2) $\operatorname{Ker} f = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x+y+2z = 0\}$

$= \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right]$

D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Im} f = 3-2 = 1$

D'où $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

f est surjective et non injective.

3) (a) Soit $X \in D \cap F$ alors $X = \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$x = 2\alpha \ ; y = \alpha \ ; z = 2\alpha$

et $2x+y+2z = 4\alpha+\alpha+4\alpha = 9\alpha = 0$ d'où $\alpha = 0$

et $D \cap F = \{0\}$.

(b) Si $X = \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + X_F$ alors $p_D(X) = \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

La matrice s'écrit $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

(c) $p_D(w) = 3\begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}12\\6\\12\end{pmatrix}$

Determinants

Exercice 1

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 5 \times 4 = 60$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ C_1 \leftarrow C_1 - C_4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & ab & (a-b)^2 \\ c^2+b^2 & bc & (b-c)^2 \\ c^2+a^2 & ca & (c-a)^2 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1 + 2C_2}{=} \begin{vmatrix} a^2+b^2 & ab & 0 \\ c^2+b^2 & bc & 0 \\ c^2+a^2 & ca & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 12 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & 3 \\ -16 & -2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 16 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \left\{ 12 + 6 \times 16 - 6 \right\}$$

$$= 3 \times 92 = 276.$$

Exercice 2

1) $\mathcal{V}$ est une base si et seulement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

$\det A = 28 \neq 0$ donc $\mathcal{V}$ base de $\mathbb{R}^4$.

2°) $$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 10 L_2 + 100 L_1}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 546 & 273 & 169 \end{vmatrix}$$

et on écrit $546 = 13a$

$273 = 13b$

$169 = 13c$

D'où $$\Delta = 13 \times \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$ et $13 / \Delta$.

3°) ${}^tA = -A$ donc $\det({}^tA) = \det(-A)$

$\Rightarrow \det(A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A$

$\Rightarrow \det A = 0$.

4°) $$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \times \begin{pmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\cancel{A}\lambda - 1) \begin{pmatrix} \lambda+4 & 2 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)\left((\lambda+4)(3-\lambda) - 10\right)$$

$$= (\lambda - 1)(-\lambda^2 - \lambda + 12 - 10) = -(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1 ; -2\}$.

Exercice 3

1) $$\Delta_2(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$$= (x+1)\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 - C_2$
$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$
$$= (x+1)\begin{vmatrix} x+2 & x+1 & x+1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3x+5 & 2x+3 & 5x+9 \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x+3 & 5x+9 \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)^2(3x+6) = -3(x+1)^2(x+2)$$

2) $A_2(x)$ inversible ssi $x \notin \{-1 ; -2\}$.

Reduction d'endomorphismes

Exercice 1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ On calcule P_{A_1} le polynôme caractéristique de A_1 :

$$P_{A_1}(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= -x \times \begin{vmatrix} -x & 2 & 0 \\ 2 & -x & 3 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -x & 3 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= -x \left\{ -x^3 + 4x + 3x \right\} - 3(x^2 - 3)$$

$$= x^4 - 7x^2 - 3x^2 + 9 = x^4 - 10x^2 + 9$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 - 9) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$$

Les valeurs propres sont toutes distinctes 2 à 2 $\Rightarrow A_1$ diagonalisable

$$A_2 = 3\,\mathbb{1}d + U \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\mathrm{Im}(U) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{Ker}\, U = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$$= \mathrm{Ker}(U - 3\,\mathbb{1}d)$$

~~Don~~

Donc U diagonalisable, de même que A_2.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{A_3}(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -2 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 0 \\ -1 & -x & 1-x \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 0 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 0 \\ -2 & -(1+x) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4°) On note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

Alors $U_{n+1} = A_2 U_n$
$= P_2 D_2 P_2^{-1} U_n$

Notons $V_n = P_2^{-1} U_n$ alors $V_{n+1} = D_2 V_n \Rightarrow V_n = D_2^n V_0$

ou encore $U_n = P_2 D_2^n P_2^{-1} U_0$

5°) Même principe $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$$X'(t) = A_2 X(t) = P_2 D_2 P_2^{-1} X(t)$$

On pose $Y(t) = P_2^{-1} X(t)$ et $Y'(t) = D_2 Y(t)$

Soit
$$y_1'(t) = 3 y_1(t) \Rightarrow y_1(t) = e^{3t} y_1(0)$$
$$y_2'(t) = 3 y_2(t) \quad y_2(t) = e^{3t} y_2(0)$$
$$y_3'(t) = 6 y_3(t) \quad y_3(t) = e^{6t} y_3(0)$$

et $y_i(0)$ donné par $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = P_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ex 2 1) $A = \mathrm{Mat}(f_a)$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-a & a-2 & a \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 2-a & a-2 & a-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1-x & 1 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 2-a & 0 & a-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2-a & 0 & a-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2-a & 0 & a-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)(a-x)(1-x+1) = (1-x)(a-x)(2-x)$$

$$P_{A_3}(x) = +(1-x)\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= +(x-1)\left\{3+3x-x^2-x-4\right\}$$

$$= -(x-1)^3$$

Si A_3 était diagonalisable, on aurait $A_3 = P_3 D_3 P_3^{-1}$ avec $D_3 = \mathbb{1}d \Rightarrow A_3 = \mathbb{1}d$ ce qui est faux donc A_3 non diagonalisable.

2°) Pour A_2 : $A_2 P_2 = P_2 D_2$ avec

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour A_1 : calcul des vecteurs propres laissés au lecteur

Notons v_1 vep associé à 1 (vecteur colonne)

v_2 ——— à -1

v_3 ——— à 3

v_4 ——— à -3

Soit $P_1 = (v_1 ; v_2 ; v_3 ; v_4)$ alors $A_1 P_1 = P_1 D_1$

avec $$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3°) $A_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}$

D'où $A_2^n = P_2 D_2^n P_2^{-1}$ $\quad D_2^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$

Si $a \neq 1, 2$, les vap de A_a sont distinctes deux à deux donc A_a diagonalisable

<u>Si $a = 2$</u> $\quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 2 vap double, 1 vap simple

Determinons $\mathrm{Ker}(A_2 - 2\mathbb{1})$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A_2 - 2\mathbb{1})$

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

D'où $\mathrm{Ker}(A_2 - 2\mathbb{1}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

et $\dim \mathrm{Ker}(A_2 - 2\mathbb{1}) = 2 \Rightarrow A_2$ diagonalisable.

<u>Si $a = 1$</u> $\quad$ 1 vap double, 2 vap simple. Examinons $\mathrm{Ker}(A_1 - \mathbb{1})$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A_1 - \mathbb{1})$

$$\begin{cases} z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}(A_1 - \mathbb{1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(A_1 - \mathbb{1}) = 1 < 2$

$\Rightarrow A_1$ non diagonalisable