Exemples sur la leçon DL

7/73

(i) $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$ $\qquad \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$

(ii) $x^\alpha \underset{x\to 0}{=} o(x^\beta)$ $\qquad \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$

(iii) $f(x) \underset{x\to a}{=} o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ (cf définition)

11/73

* $x^3 + x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ car $x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x)$

Donc $x^3 + x \underset{x\to 0}{\sim} x$

* $x^3 + x = x^3\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $x^3 + x \underset{x\to\infty}{\sim} x^3$

13/73

* $x^2 + \cos(x)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \neq 0$

donc $x^2 + \cos^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$

* $x^2 + \sin^2(x) = x^2\left(1 + \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2\right)$

Or $\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} \sin'(0)$ (définition dérivée)

D'où $\dfrac{x^2 + \sin^2(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$ ainsi $x^2 + \sin^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$

* $e^{2x} - \sqrt{x} = e^{2x}\left(1 - e^{-2x}\sqrt{x}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}\sqrt{x} = 0$ par croissance comparée

donc $e^{2x} - \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{2x}$

15/73 ① $f(x) = a_p x^p + \text{———} + a_n x^n \qquad p < n \quad \begin{pmatrix} a_p \neq 0 \\ a_n \neq 0 \end{pmatrix}$

<u>en 0</u> $f(x) = x^p \left(\underbrace{a_p + a_{p+1}x + \text{——} + a_n x^{n-p}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} a_p} \right)$

D'où $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$

<u>en $+\infty$</u> $f(x) = x^n \left(\underbrace{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_p \frac{1}{x^{n-p}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} a_n} \right)$

D'où $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$

② $g(x) = e^x + x^3$

<u>en 0</u> $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ donc $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$

<u>en $+\infty$</u> $g(x) = e^x(1 + x^3 e^{-x})$ et $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-x} = 0$ par croissance comparée

donc $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$

③ $h(x) = \ln(x) + \sqrt{x}$.

<u>en 0</u> $h(x) = \ln(x)\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}\right)$ et $\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

d'où $h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$

<u>en $+\infty$</u> $h(x) = \sqrt{x}\left(1 + \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right) \qquad \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

par croissance comparée

16/73 Equivalent en $+\infty$ de $\frac{\sqrt{x}-x^2}{1+x}$

On a $\left.\begin{array}{l} \sqrt{x}-x^2 \underset{+\infty}{\sim} -x^2 \\ 1+x \underset{+\infty}{\sim} x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-x^2}{1+x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-x^2}{x} = -x.$

17/73 ① $f(x) = x^2+1 \qquad g(x) = -x^2-x$

$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 1-x$

On a $\begin{array}{l} f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2 \\ g(x) \underset{+\infty}{\sim} -x^2 \end{array}$ mais $(f+g)(x) \underset{+\infty}{\sim} -x$ $\neq$ de la somme des equivalents (ici 0)

② $f(x) = x^2+x \quad g(x) = x^2$ On a $f \underset{+\infty}{\sim} g$ (evident)

<u>mais</u> $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^x \not\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ donc $e^f \not\sim e^g$

19/73 $f(x) = x+\sqrt{x^2+1}$

$= x + x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \quad \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$

D'où $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$

$\ln(f(x)) = \ln\left(x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right)$

$= \ln(x) + \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

<u>D'où</u> $\ln(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$

<u>21/73</u> Ces equivalents sont à connaître

par coeur ou à savoir retrouver rapidement.

24/73 1) $f(x) = \dfrac{(1+x^2)\tan(x)}{\sin(2x)} = \underbrace{\dfrac{(1+x^2)}{2}}_{\to 1/2} \times \underbrace{\dfrac{\tan x}{x}}_{\to 1} \times \underbrace{\dfrac{2x}{\sin(2x)}}_{\to 1}$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1/2$

2) $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{1+x^2}} - 1\right)$ $\qquad u(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

$= \underbrace{x\,u(x)}_{= \frac{x^2}{1+x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1} \; \underbrace{\dfrac{e^{u(x)} - 1}{u(x)}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1}$

Bilan $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

3) $f(x) = \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^x$

$= \left(\dfrac{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)}$

$= e^{x\left(\frac{1}{x\ln(x)} + o\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)\right)}$

$= e^{\frac{1}{\ln(x)} + o\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

---

43 → 47/73

Ces sont à connaître par coeur.

51/73 (i) $f : x \longmapsto e^x \sqrt{1-x}$ à l'ordre 2

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)x^2 + o(x^2)$$

$$\boxed{f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)}$$

(ii) $f : x \longmapsto (\mathrm{sh}(x) - \sin(x)) \ln(1+x)$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x \to 0}{o}(x^5)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x \to 0}{o}(x^5)$$

$$\Rightarrow (\mathrm{sh}(x) - \sin(x)) = \frac{x^3}{3} + \underset{x \to 0}{o}(x^5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{6} + o(x^5)}$$

54/73

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

Soit $u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-u(x)} = 1 + u(x) + u(x)^2 + o(x^5)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)$$

$$\left(\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5) \right.$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\tan(x) = x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5!} + \frac{5}{24} - \frac{1}{12}\right)x^5 + o(x^5)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

55/73 DL_3 de $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \dfrac{\ln(1+x)/x}{\sin(x)/x}$

On a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \qquad v(x) = \frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4)$$

Donc $\dfrac{1}{\sin(x)/x} = \dfrac{1}{1 - v(x)} = 1 + v(x) + o(x^3)$

$$= 1 + \frac{x^2}{3!} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

D'où $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + o(x^3)\right)\left(1 + \dfrac{x^2}{3!} + o(x^3)\right)$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{3}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right)x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

56/73 DL_4 de $x \longmapsto e^{\sin(x)}$; $x \longmapsto e^{\cos(x)}$

Rq $x \mapsto e^{\cos(x)}$ est paire donc son DL est de la forme

$$e^{\cos(x)} = a + bx^2 + cx^4 + o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) := 1 + u(x)$$

$$e^{\cos(x)} = e^1 \times e^{u(x)} = e^1 \times \left[1 + u(x) + \frac{u^2(x)}{2} + o(x^4)\right]$$

$$= e^1 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)$$

$$= e^1 - \frac{e^1}{2}x^2 + \frac{e^1}{6}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{\sin(x)} = 1 + \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{2} + \frac{\sin^3(x)}{3!} + \frac{\sin^4(x)}{4!} + o(x^4)$$

$$= 1 + \left(x - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{6}x^4 + o(x^4)\right) + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

FIN