Intégrales généralisées

$\boxed{8/24}$ (i) Nature de $\int_0^1 \frac{dx}{x}$: Soit $a>0$ $(a<1)$

$$\int_a^1 \frac{dx}{x} = \left[\ln(x)\right]_a^1 = -\ln(a) \xrightarrow[a\to 0^+]{} +\infty$$

Donc $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverge

(ii) Nature de $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ Soit $a>0$ $(a<1)$

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 = \frac{1}{a} - 1 \xrightarrow[a\to 0^+]{} +\infty$$

Donc $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ diverge

$\boxed{12/24}$ ⚠ La remarque $f(x)\to 0 \not\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

est TRÈS importante

Le contre exemple $x \longmapsto \frac{1}{x}$ doit être connu.

$\boxed{18/24}$ Nature de $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln(x)}$ $a>e$

Si $\alpha<0$, $\frac{1}{x^\alpha \ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ (croissance comparée)

donc $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln(x)}$ diverge

Si $\underline{\alpha = 0}$ $\frac{1}{\ln(x)} \geq \frac{1}{x}$ pour x assez grand

$\left(\text{Rq } \frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty\right)$

comme $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge

on a la même chose pour $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)}$

Supposons $\alpha > 0$

Si $\alpha > 1$ $\frac{1}{x^\alpha \ln(x)} = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

d'après le critère de Riemann $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge

donc $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln(x)}$ converge

Si $\alpha = 1$ Posons $M > a$.

$$\int_a^M \frac{dx}{x \ln(x)} \underset{\text{CDV: } t = \ln(x)}{=} \int_{\ln(a)}^{\ln(M)} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{\ln(M)}{\ln(a)}\right) \xrightarrow[M \to \infty]{} \infty$$

Donc $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(x)}$ diverge

Si $0 < \alpha < 1$ on a pour tout $x \geq 1$

$$\frac{1}{x^\alpha \ln(x)} \geq \frac{1}{x \ln(x)}$$

donc, par comparaison $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln(x)}$ diverge.

19/24 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$

On a $\left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ $\forall x \in [1; +\infty[$

D'après le critère de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge

donc, par comparaison $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| dx$ converge

ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$ converge

---

20 → 24/24 L'exemple de semi

convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ est classique et très important à maîtriser.