Réduction endomorphismes

6/27

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ resp un vecteur propre (noté vep par la suite) et une valeur propre (notée vap) de A. $AX = \lambda X \iff$

$$\begin{cases} 7x - 12y = \lambda x & \text{I} \\ 4x - 7y = \lambda y & \text{II} \end{cases}$$

II $\quad 4x = (\lambda + 7)\,y$

donc I $\quad (7-\lambda)\left(\frac{\lambda+7}{4}\right) y - 12y = 0$

$\iff (49 - \lambda^2)\,y - 48y = 0$

$\iff (1 - \lambda^2)\,y = 0$

Pour avoir $X \neq 0$, il faut nécessairement $\lambda^2 - 1 = 0$ donc

$\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ sont les vap de A

Si $\lambda = 1 \quad x = 2y$ donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vep de A associé à $\lambda = 1$

Si $\lambda = -1 \quad 4x = 6y$ donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ——— à $\lambda = -1$

7/27

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$\boxed{11/27}$ On calcule $\det(B - \lambda \mathbb{1}d)$

$$\det(B - \lambda \mathbb{1}d) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1\ \lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour $i = 2, 3$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda+2)^2$$

Donc les valeurs propres sont $\lambda = 1$ (vap simple) et $\lambda = -2$ (vap double)

Pour $\lambda = 1$ Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(B - \mathbb{1}d) := E_1$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 & \mathrm{I} \\ x - 2y + z = 0 & \mathrm{II} \\ x + y - 2z = 0 & \mathrm{III} \end{cases}$$

$\mathrm{I} \Leftarrow \mathrm{I} + \mathrm{II}$ $\quad -x - y + 2z = 0 \quad \Rightarrow$ equation III

D'où $(\mathrm{I} ; \mathrm{II} ; \mathrm{III}) \Leftrightarrow (\mathrm{I} ; \mathrm{II})$ (eq III redondante)

$$\begin{cases} 2x = y + z & (i) \\ x = 2y - z & (ii) \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad 3y = 3x \quad ((i)+(ii)) \quad \Rightarrow \quad y = x$

$\Rightarrow \quad z = x$

D'où $\quad x = y = z \quad$ et $\quad E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Pour $\lambda = -2$ On obtient 3 fois la même equation

$$E_{-2} = \{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z = 0 \}$$
$$= \{ (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = -x-y \}$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

12/27 cf 11/27

$$P_B(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+2)^2$$

17/27 (i) $A_1 = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

On a vu que A_1 avait pour vap $\pm 1 \Rightarrow$ diagonalisable (vap distinctes en dimension 2)

De même $P_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 + 1 \longrightarrow$ non diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (vap $\pm i$ distinctes)

(ii) Pour B_1 : $P_{B_1}(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+2)^2 \Rightarrow$ on ne peut conclure directement au caractère diagonalisable.

Par contre P_{B_1} est scindé

et $\dim E_1 = 1$

$\dim E_{-2} = 2$ (cf diap 11)

donc d'après le critère diapo 16, B_1 est diagonalisable.

Pour B_2

$$P_{B_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(\lambda-3)(\lambda+4)+10\right]$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

Examinons E_1 Soit $(x, y, z) \in E_1$ alors

$$\begin{cases} -5x - 2z = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $y = 0$ et $5x + 2z = 0$

$$E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \dim E_1 = 1 < 2$$

Donc B_2 n'est pas diagonalisable.

FIN