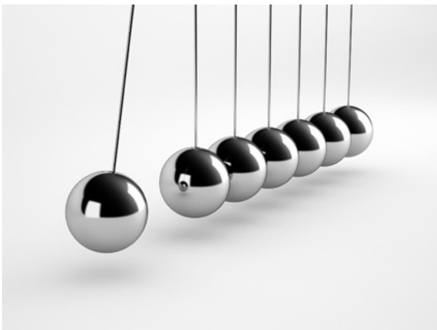
1re année INSA (I1ANPH12)
2023-2024

Mécanique du point



Iann Gerber
igerber@insa-toulouse.fr
Département de Génie Physique
Bâtiment LPCNO

Modes d'apprentissage

7 CMs
11 TDs + 4 TDs Outils Math + APP Méthodo (TP Smartphone)
3 Séances de remédiation

- Une séance de TD se prépare :

- on lit l'énoncé
- on retourne dans ces notes de cours ou sur moodle pour se remémorer les points essentiels
- on réfléchit et essaie de répondre aux questions

- Un CM se prépare :

- on relit les notes de cours prises la fois précédente
- On lit la partie de cours à venir (cours sur moodle, slides)

Modes d'évaluation

- 3 Evaluations basées sur un contrôle des micro-compétences suivantes
  - MP 1 : Connaitre les concepts généraux de la mécanique du point
  - MP 2 : Résoudre un problème, calculer et analyser le résultat en mécanique

Ces micro-compétences définissent l'acquis spécifique MP0 mécanique du point.

Notation : A+ > 17
A > 14
B > 11
C > 8
D < 8

Ces micro-compétences servent aussi à la définition de macro-compétences transverses au niveau du Grand Domaine Sciences Physiques, Chimiques et Industrielles

Ressources en ligne

https://moodle.insa-toulouse.fr

-- Poly de cours (slides et format livre)
-- Enoncés des TDs
-- Exercices supplémentaires
-- Cartes mentales
-- Annales

Ouvrages recommandés

E. Hecht, Physique, ITP DeBoeck Université (1999)

A. Gibaud et M. Henry, Mécanique du point, Dunod

J.P. Faroux & J. Renault, Mécanique 1, Dunod , 4^{e} édition (1996)

J-P Pérez, Mécanique fondements et applications, Masson, 5^{e} édition (1997)

A. Colin, Berkley Mécanique, cours de physique volume 1, Collection U

Mécanique 1^{ere} et 2^{e} année, EdiScience-Dunod (2003)

R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, Les cours de physique de Feynman, Mécanique 1, Dunod (1999)

Introduction générale

- La mécanique permet de:

    - prévoir la trajectoire des corps massifs
    - calculer l'équilibre mécanique d'une structure
    - expliquer la propagation des sons
    - décrire l'interaction d'une particule avec les champs de gravité ou électromagnétique
    - …

- La mécanique est un des socles de la science moderne où la démarche scientifique moderne est apparue. C'est-à-dire la réalisation d'expérimentation spécifique afin de les confronter à une idée, une intuition, à une théorie.

- Concepts fondamentaux des sciences modernes nés avec la mécanique :

    - la quantité de mouvement et le moment cinétique de rotation
    - les interactions entre corps
    - la notion de travail d'une force, la notion d'énergie cinétique et d'énergie potentielle
    - les lois de conservations

Toutes ces notions apparaissent dans différents champs des sciences autres que la mécanique : la thermodynamique, la chimie etc…

La mécanique dans un cursus ingénieur

Génie Mécanique
Calcul de la cinématique et de la dynamique d'un robot d'une chaine de construction automobile
Calcul de la déformation d'une voiture lors d'un choc

Génie Civil
Calcul de la stabilité d'un pont et de sa résistance vis-vis d'une charge (vent, voitures et camions)
Calcul de l'acoustique d'une salle (isolation…)

Génie Physique
Détermination de la réponse d'un capteur de vitesse à une accélération
Détermination de l'influence d'un champ électromagnétique sur le mouvement des électrons dans un transistor

Génie Mathématique et Modélisation
Modélisation numérique de structure, de mécanique des fluides

Génie des Procédés et Environnement et Génie Biochimique
Détermination de l'écoulement de l'eau dans une centrale de retraitements des eaux usées ou l'écoulement de fluides dans un bioréacteur

CHAPITRE 1 :
Le mouvement, cinématique d'un point matériel

Les « savoir-faire » à acquérir en fin de chapitre

- Etre capable de **déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée** et **savoir calculer un produit scalaire** et **un produit vectoriel** à partir des coordonnées des vecteurs.

- Etre capable de **décrire précisément un mouvement**, c'est-à-dire déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ et le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ d'un point matériel à tout instant t.

- Etre capable de **faire cette analyse** dans la **base cartésienne**, dans la **base cylindrique** et dans la **base de Frenet**.

- Etre capable de **déterminer la position** d'un point matériel $\overrightarrow{OM}(t)$ à partir de son **vecteur accélération** $\vec{a}(t)$.

Introduction

L'objectif de la mécanique du point est d'expliquer et de prédire le **mouvement** d'un objet à partir des forces agissant sur lui.

Les trois paramètres décrivant le mouvement sont :
- la **position** de l'objet à un instant t donné,
- la **vitesse**
- l'**accélération**.

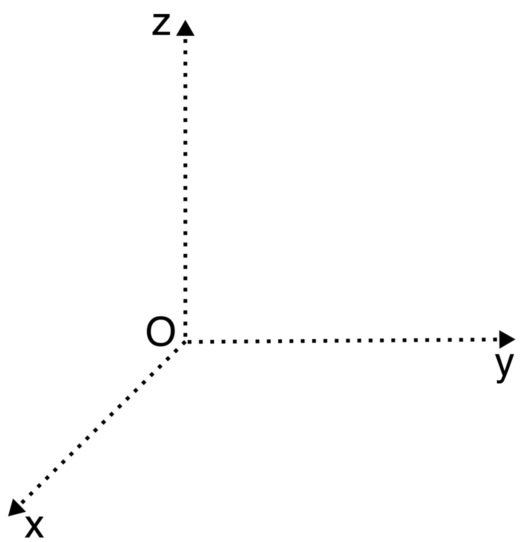
La vitesse et l'accélération d'un objet sont caractérisées par :
- leur amplitude
- leur direction.

$\Longrightarrow$ la notion de vecteur sera donc la plus adaptée pour décrire le mouvement.

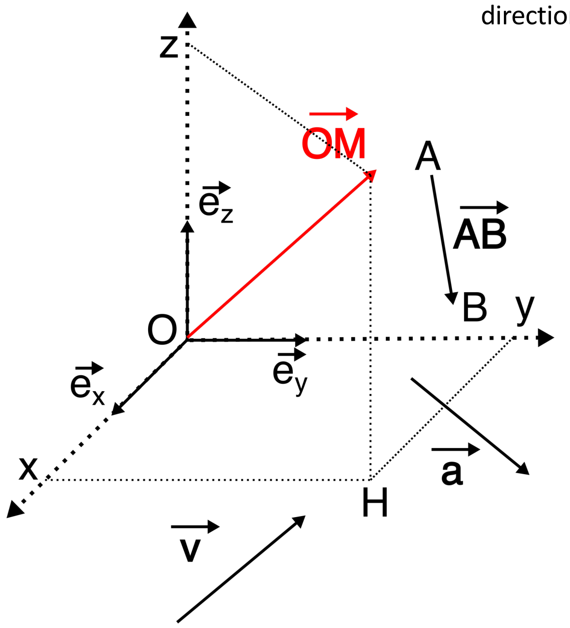
I-Analyse vectorielle

I.1) Définition basique d'un repère d'espace

Il faut utiliser trois axes (en général on les notes x, y, z) et une origine O pour localiser un point dans l'espace.



I.2) Généralités sur les vecteurs



Définition d'un vecteur

Un **vecteur**, généralement noté $\vec{v}$, est un objet mathématique qui possède à la fois une grandeur, une direction et un sens. La direction et le sens constituent l'orientation du vecteur.

Coordonnées du point *M*

$$\boxed{\vec{OM} = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z}$$

Coordonnées d'un vecteur

$$\vec{v} = v_x(x,y,z,t)\,\vec{e}_x + v_y(x,y,z,t)\,\vec{e}_y + v_z(x,y,z,t)\,\vec{e}_z$$

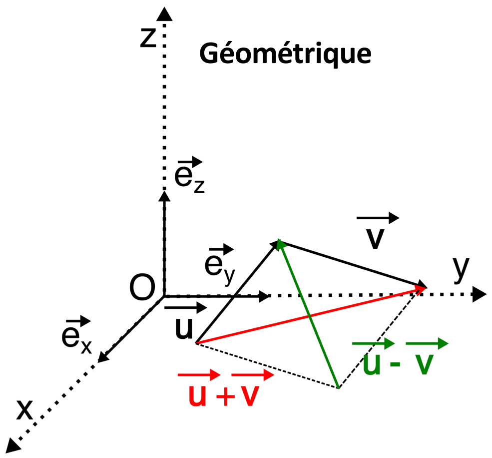
$$\vec{v} = \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix}$$

Norme d'un vecteur

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

I.3) Addition et soustraction de vecteurs

Géométrique



Analytique

$$\vec{u} = a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y + c\,\vec{e}_z$$

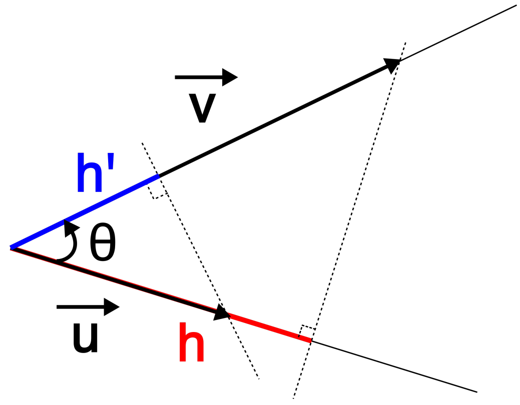
$$\vec{v} = a'\,\vec{e}_x + b'\,\vec{e}_y + c'\,\vec{e}_z$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (a + a')\,\vec{e}_x + (b + b')\,\vec{e}_y + (c + c')\,\vec{e}_z \\ \vec{u} - \vec{v} &= (a - a')\,\vec{e}_x + (b - b')\,\vec{e}_y + (c - c')\,\vec{e}_z \end{aligned}}$$

Coordonnées d'un vecteur $\vec{AB}$

$$\boxed{\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix}}$$

I.4) Le produit scalaire



Définition géométrique

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos(\theta) = \|\vec{u}\|\,h = \|\vec{v}\|\,h'}$$

Le produit scalaire est :
- Commutatif : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$
- Distributif : $\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$

Définition Analytique

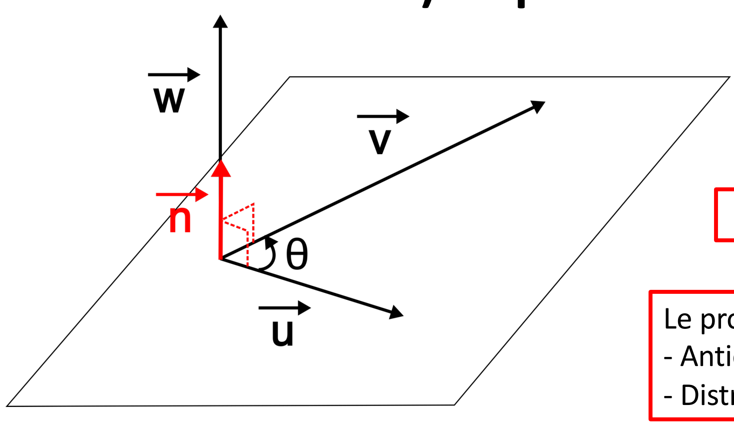
$$\vec{u} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix} = ad + be + cf}$$

Expression d'un vecteur quelconque à l'aide du produit scalaire

$$\vec{u} = (\vec{u}\,.\,\vec{e}_x)\,\vec{e}_x + (\vec{u}\,.\,\vec{e}_y)\,\vec{e}_y + (\vec{u}\,.\,\vec{e}_z)\,\vec{e}_z$$

I.5) Le produit vectoriel



Définition géométrique

$$\boxed{\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,sin(\theta)\,\vec{n}}$$

Le produit vectoriel est :
- Anticommutatif : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- Distributif : $\vec{u} \wedge (\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

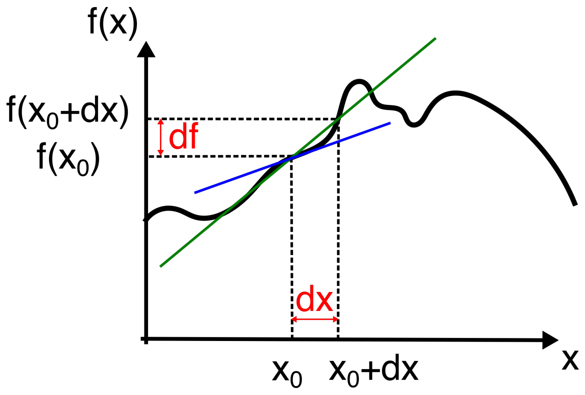
Définition Analytique

$$\boxed{\vec{u} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \quad \vec{v} = \begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix} \Longrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{vmatrix}}$$

I.6) Différentielle d'un vecteur

Rappel: Différentielle et dérivée d'une fonction scalaire f(x)

Variation de f autour de x_0 : $f(x_0 + dx) = f(x_0) + df$



Nombre dérivé

$$f'(x_0) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_0 + dx) - f(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{df}{dx}$$

Fonction dérivée

$$f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{df}{dx}$$

Différentielle

$$df = f(x + dx) - f(x)$$

$$df = f'(x)\, dx$$

Différentielle et dérivée d'un produit de fonction

$$d(fg) = (fg)'dx = f'g\, dx + fg'\, dx = g\, df + f\, dg$$

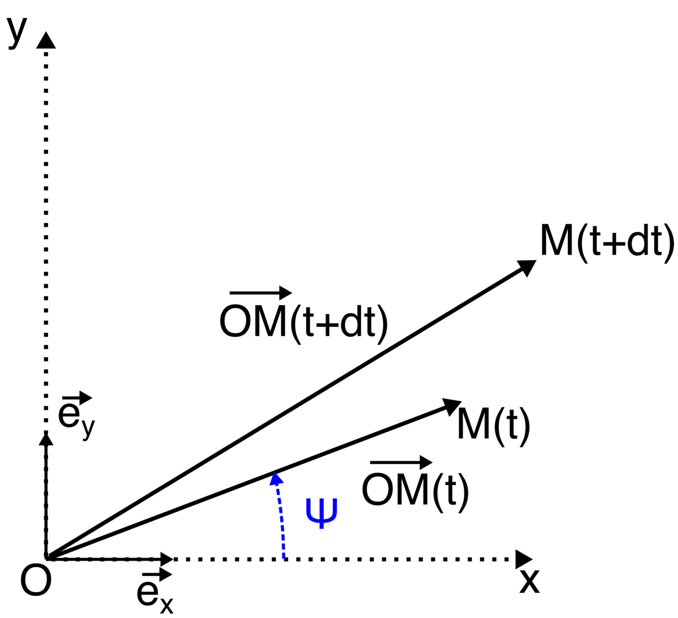
$$(fg)' = f'g + fg'$$

Dérivée d'une fonction composée

$$d(g \text{ o } f) = dg(f)\, df$$
$$(g \text{ o } f)' = (g' \text{o } f)\, f'$$

I.6) Différentielle d'un vecteur

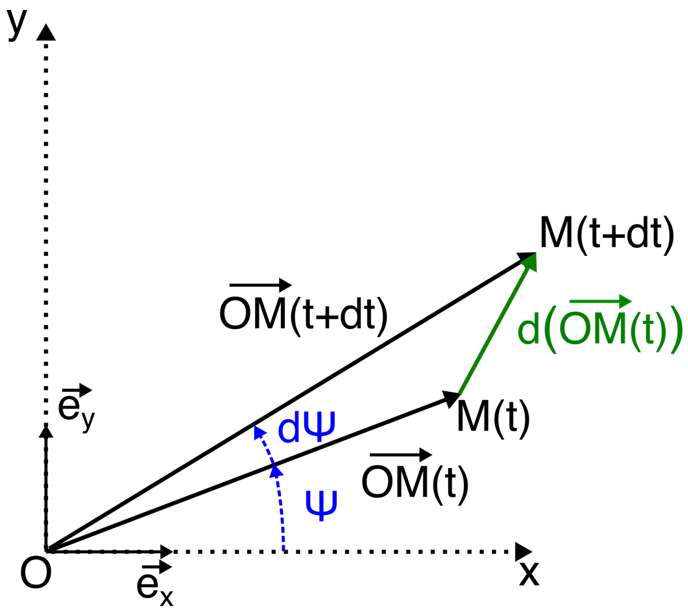
Définition géométrique



Différentielle d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ entre deux instants t et $t + dt$

I.6) Différentielle d'un vecteur

Définition géométrique

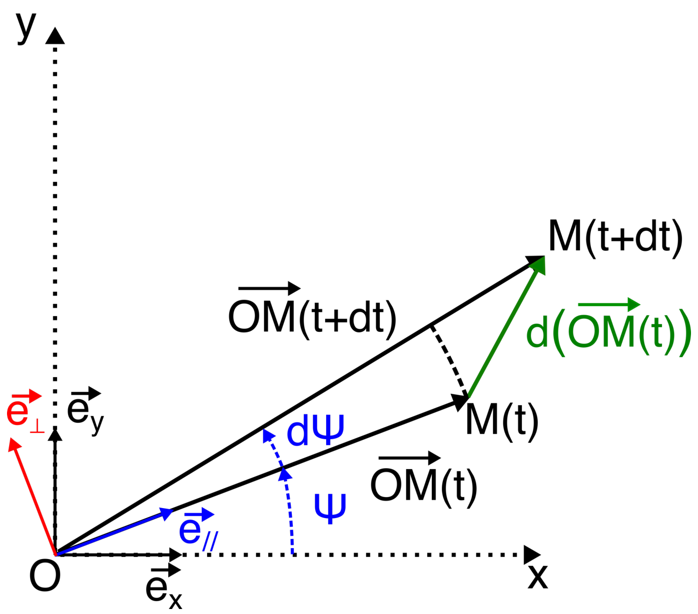


Différentielle d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ entre deux instants t et $t + dt$

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)$$

I.6) Différentielle d'un vecteur

Définition géométrique



Différentielle d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ entre deux instants t et $t + dt$

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)$$

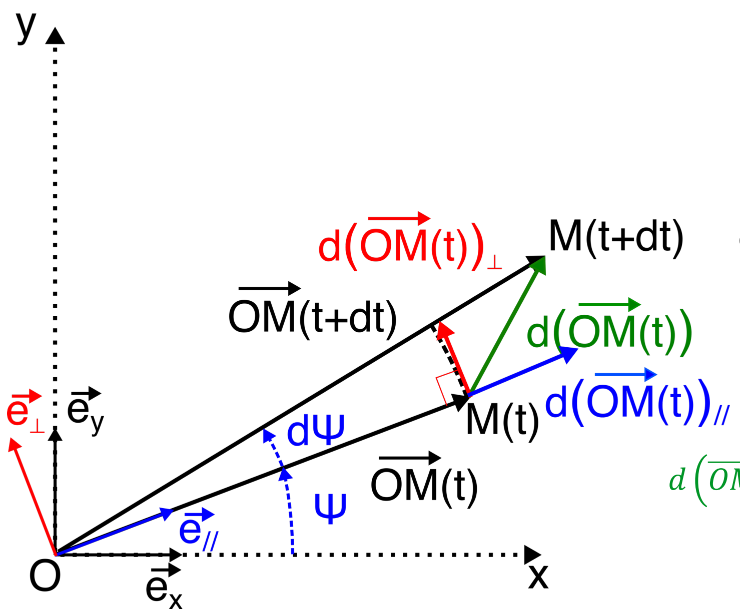
On définit $\vec{e}_{//}$ et $\vec{e}_{\perp}$ de telle sorte que

$$\overrightarrow{OM}(t) = \left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\| \vec{e}_{//}$$

$$\vec{e}_{\perp} \perp \vec{e}_{//}$$

I.6) Différentielle d'un vecteur

Définition géométrique



Différentielle d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ entre deux instants t et $t + dt$

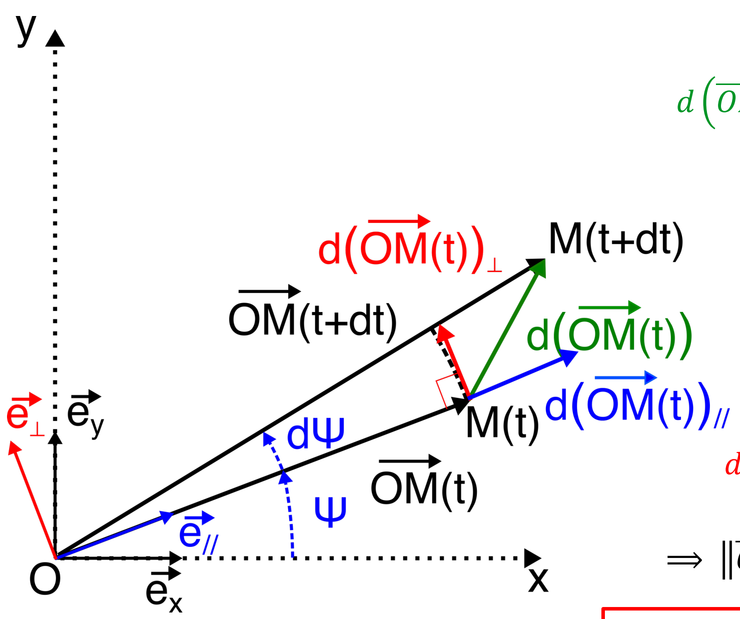
$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)$$

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_\perp + d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_{//}$$

I.6) Différentielle d'un vecteur

Définition géométrique

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_\perp + d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_{//}$$



Lorsque $d\psi \to 0$

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_{//} \to d\|\overrightarrow{OM}(t)\|\vec{e}_{//}$$

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_\perp = \left\|d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)_\perp\right\| \vec{e}_\perp$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{OM}(t)\|\tan(d\psi)\ \vec{e}_\perp \approx \|\overrightarrow{OM}(t)\| d\psi\ \vec{e}_\perp$$

$$\boxed{d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d\|\overrightarrow{OM}(t)\|\ \vec{e}_{//} + \|\overrightarrow{OM}(t)\| d\psi\ \vec{e}_\perp}$$

I.6) Différentielle d'un vecteur

Définition analytique

$$\overrightarrow{OM}(t) = A(t)\,\vec{e}_x + B(t)\,\vec{e}_y$$

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d\left(A(t)\,\vec{e}_x\right) + d\left(B(t)\,\vec{e}_y\right)$$

$$d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d\left(A(t)\right)\,\vec{e}_x + d\left(B(t)\right)\,\vec{e}_y + A(t)\,d(\vec{e}_x) + B(t)\,d\left(\vec{e}_y\right)$$

$$\boxed{d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right) = d\left(A(t)\right)\,\vec{e}_x + d\left(B(t)\right)\,\vec{e}_y}$$

I.7) Dérivée d'un vecteur par rapport au temps

$$\frac{d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)}{dt} = \lim_{dt\to 0}\left(\frac{\overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right) = \frac{d\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|}{dt}\,\vec{e}_{//} + \left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|\,\frac{d\psi}{dt}\,\vec{e}_{\perp}$$

ou

$$\frac{d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)}{dt} = \dot{A}(t)\,\vec{e}_x + \dot{B}(t)\,\vec{e}_y$$

I.8) Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

$$\|\vec{e}\| = 1 \Longrightarrow d\|\vec{e}\| = 0$$

$$d(\vec{e}) = d\|\vec{e}\|\ \vec{e}_{//} + \|\vec{e}\| d\psi\ \vec{e}_{\perp} = d\psi\ \vec{e}_{\perp}$$

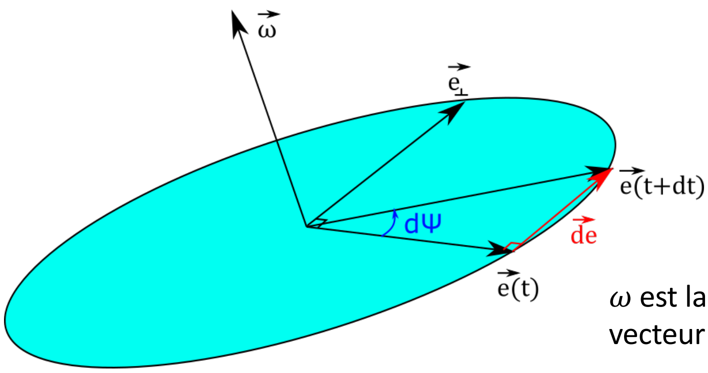
$$\Longrightarrow d(\vec{e}) = d\psi\ \vec{e}_{\perp}$$

$$\boxed{\frac{d(\vec{e})}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\vec{e}_{\perp}}$$

la différentielle (et la dérivée) d'un vecteur unitaire est un vecteur perpendiculaire à celui-ci.

Sa norme n'est cependant pas unitaire et vaut $d\psi$ dans le cas de la différentielle et $\frac{d\psi}{dt}$dans le cas de la dérivée.

Vecteur rotation



$$\frac{d(\vec{e})}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\vec{e}_{\perp}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega$$

ω est la vitesse angulaire à laquelle tourne le vecteur $\vec{e}$.

On définit le vecteur $\vec{\omega}$ de la manière suivante :

- Le vecteur $\vec{\omega}$ est toujours perpendiculaire au plan de la rotation du vecteur $\vec{e}$.
- Sa norme est proportionnelle à la vitesse angulaire, soit $\|\vec{\omega}\| = \omega = \frac{d\psi}{dt}$
- Le sens du vecteur $\vec{\omega}$ dépend du sens de rotation du vecteur $\vec{e}$ selon la règle de la main droite.

$$\boxed{\frac{d(\vec{e})}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e} = \|\vec{\omega}\|\ \vec{e}_{\perp}}$$

II) Définitions de base

II.1) Référentiels

L'analyse du mouvement dépend directement d'un **observateur,** qui a conscience de l'écoulement du temps, fléché du passé vers le futur. Il perçoit l'existence d'objets indépendamment de lui-même, localisés dans l'espace et pouvant se déplacer au cours du temps. Le mouvement est **relatif** à l'observateur.

On définit donc un **référentiel d'observation ou solide de référence** où l'observateur est fixe.

<u>Exemple</u> : chute d'un objet pour un observateur fixe et pour un observateur mobile

II.2) Point matériel

Point matériel = point géométrique modélisant un système de corps ou un solide dont la position est parfaitement **déterminée par la donnée de trois coordonnées et d'un paramètre temporel**.
En pratique le point matériel modélisant un système de corps ou un solide = **centre de gravité** auquel on associe toute la masse du système.

II.2) Repère d'observation et repère de temps

Le **repère d'observation se caractérise par une origine** O **fixe dans le référentiel choisi** (en général l'observateur) ainsi que **par trois axes de références orthonormés** $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ **fixes** (liés) dans le référentiel choisi. Leur norme, leur direction et leur sens ne varient pas.

Le repère de temps est constitué d'une origine, généralement l'instant où l'on connaît précisément la position et la vitesse d'un objet. A partir de cet instant initial, le temps ne peut que s'écouler dans un sens, du passé vers le futur. Le temps en mécanique classique est une notion absolue et non relative, elle ne dépend pas du mouvement de l'observateur.

Nous utiliserons la notation suivante pour définir un référentiel et son repère d'observation :

$$\boxed{\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)}$$

II.4) Base et repère d'espace

Lorsqu'on souhaite définir un référentiel avec un système de coordonnées possédant une base non fixe dans le référentiel, nous utiliserons le terme de **repère d'espace** et non repère d'observation.

Il existe d'autres **systèmes de coordonnées** telles que les coordonnées cylindriques, sphériques ou encore la base de Frenet.

A la différence des coordonnées cartésiennes, les vecteurs de bases orthonormés définissant les coordonnées cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ou encore la base de Frenet $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_b)$ **ne sont pas fixes** mais liés au point M.

Ces systèmes de coordonnées ne peuvent définir que des repères d'espace.

II.5) Trajectoires

La **trajectoire** d'un point matériel constitue **l'ensemble des positions de l'espace que ce dernier occupe au cours du temps.**

Il s'agit d'une ou plusieurs équations qui relie(nt) entre elles les différentes coordonnées d'un repère, par exemple $y = x^2 + 3$ et z=0 dans le système de coordonnées cartésiennes. **Le paramètre temps *t* n'apparaît pas dans les équations de la trajectoire**.

Cependant, une trajectoire peut être parfaitement définie lorsque l'on connait l'évolution temporelle de toutes les coordonnées caractérisant la position d'un point matériel.

Nous parlons dans ce cas « d'équations horaires » dans lesquelles le paramètre t apparaît explicitement. Autrement dit, à chaque « valeur » du temps t, il est possible d'associer une position du point M dans l'espace, repérée par ses coordonnées.

III) Cinématique, description du mouvement dans différents systèmes de coordonnées

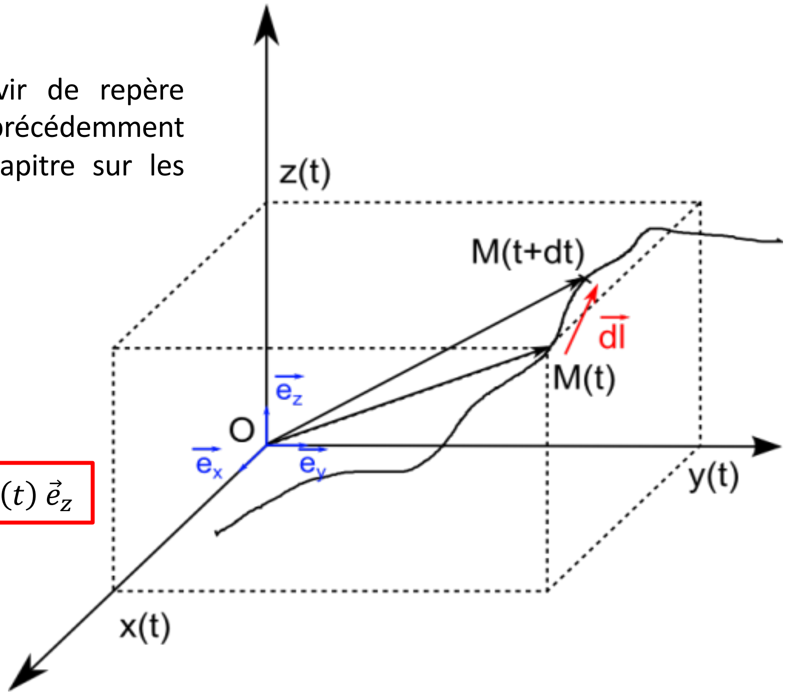
III.1) Repère cartésien

Le repère cartésien peut servir de repère d'observation comme on l'a vu précédemment ou de repère d'espace, *cf.* chapitre sur les changements de référentiels.

III.1.1) Vecteur position

Dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z}$$



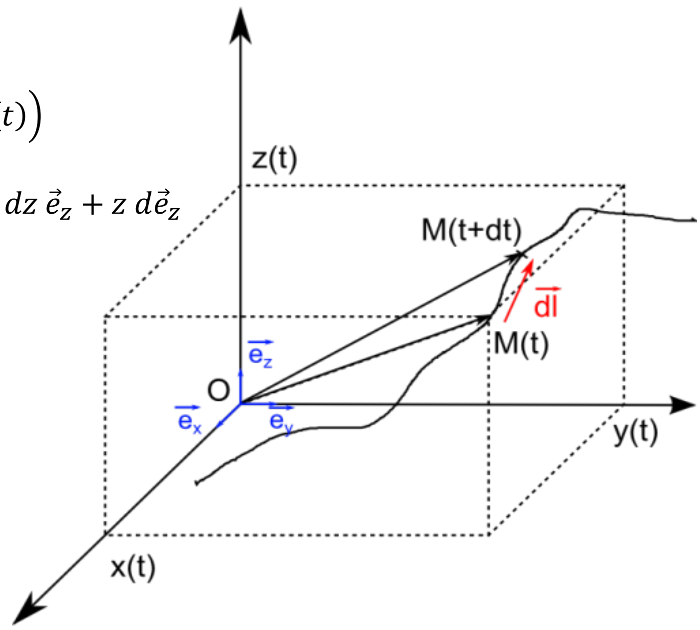
III.1.2) Vecteur déplacement élémentaire

Dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t) = d\left(\overrightarrow{OM}(t)\right)$$

$$\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{e}_x + x\,d\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + y\,d\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z + z\,d\vec{e}_z$$

$$\boxed{\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z}$$



III.1.3) Vecteur vitesse

Dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$:

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\,\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\,\vec{e}_z = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z = \left|\begin{array}{l}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{array}\right.}$$

Unité de $\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|$: m.s^{-1}.

III.1.4) Vecteur accélération

Le vecteur accélération donne plus d'informations que la variation scalaire de la vitesse. Il renseigne aussi le changement de direction du mouvement. C'est-à-dire que la vitesse peut garder en norme une valeur constante mais changer de direction. Son accélération est alors non nulle.

Dans $\mathcal{R}\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t\right)$:

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{\overrightarrow{d^2l}}{dt^2} = \frac{d^2\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{e}_z = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z = \left|\begin{array}{l}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{array}\right.}$$

Unité de $\left\|\vec{a}_{M/\mathcal{R}}\right\|$: m.s^{-2}.

III.2) Repère cylindrique

- Le repère cylindrique est orthonormé, constitué de trois vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ formant une base directe.
- Nous étudions le mouvement par rapport au référentiel d'observation $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. $\vec{e}_z$ est « fixe » dans ce référentiel tandis que les deux autres $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ sont mobiles.
- Le repère cylindrique est donc un repère d'espace. Il est très adapté pour décrire des mouvements de rotation autour d'un axe : circulaire, elliptique, hélicoïdale etc…

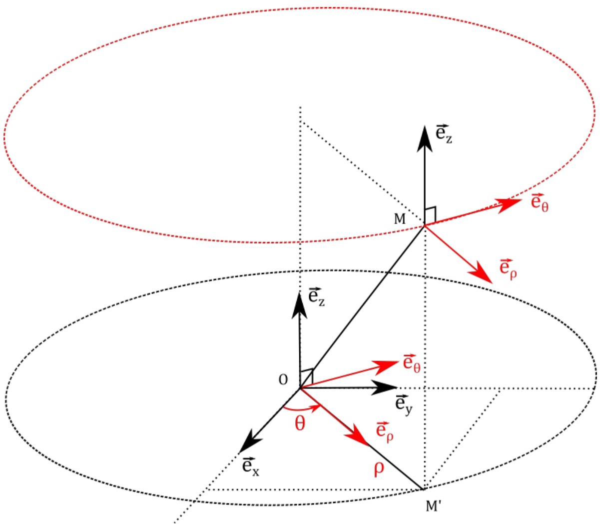
III.2.1) Vecteur position

La position d'un point quelconque M dans ce repère est définie à partir du point origine O par ses coordonnées (ρ, θ, z).

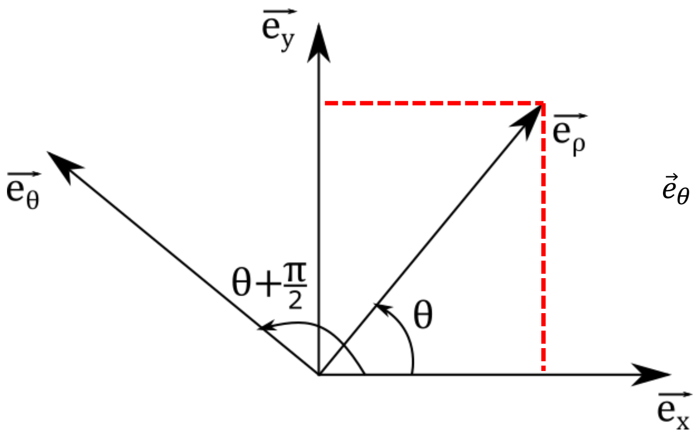
$$\rho = \left\|\overrightarrow{OM'}\right\| \text{ donc}$$

$$\vec{e}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM'}}{\rho}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z}$$



Expression des vecteurs $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$ dans la base $\vec{e}_x, \vec{e}_y$



$$\vec{e}_\rho = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y$$

Rotation de $+\frac{\pi}{2}$

$$\vec{e}_\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_x + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\,\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y$$

III.2.2) Vecteur déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{dl} = d\big(\overrightarrow{OM}\big) = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\vec{e}_\rho + dz\,\vec{e}_z + z\,d\vec{e}_z = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\vec{e}_\rho + dz\,\vec{e}_z$$

$$d\vec{e}_\rho = \mathrm{d}(\cos(\theta(t))\,\vec{e}_x) + d(\sin(\theta(t))\,\vec{e}_y)$$
$$d\vec{e}_\rho = \mathrm{d}(\cos(\theta(t)))\,\vec{e}_x + d\left(\sin(\theta(t))\right)\vec{e}_y$$
$$d\vec{e}_\rho = -\sin(\theta(t))\,d\theta\,\vec{e}_x + \cos(\theta(t))\,d\theta\,\vec{e}_y$$
$$d\vec{e}_\rho = d\theta\big(-\sin(\theta(t))\,\vec{e}_x + \cos(\theta(t))\,\vec{e}_y\big)$$

$$d\vec{e}_\rho = d\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{\overrightarrow{dl} = d\big(\overrightarrow{OM}\big) = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z = \left|\begin{matrix} d\rho \\ \rho d\theta \\ dz \end{matrix}\right.}$$

III.2.3) Vecteur vitesse

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{\vec{dl}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\,\vec{e}_z = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z = \left|\begin{array}{c}\dot{\rho}\\ \rho\dot{\theta}\\ \dot{z}\end{array}\right.}$$

<u>Remarque</u> : il ne faut pas confondre à ce stade référentiel et repère. L'expression précédente traduit bien la vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Cependant nous utilisons le repère d'espace cylindrique pour l'exprimer. Il faut être conscient que la vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$ attaché au repère d'espace cylindrique s'exprime différemment.
Elle est donnée par: $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{z}\,\vec{e}_z$

III.2.4) Vecteur accélération

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho\right) + \frac{d}{dt}\left(\rho\,\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt}\,\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \rho\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + \rho\,\frac{d\theta}{dt}\,\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} d\vec{e}_\theta &= \mathrm{d}(-\sin(\theta(t))\,\vec{e}_x) + d(\cos(\theta(t))\,\vec{e}_y)\\ d\vec{e}_\theta &= -\cos(\theta(t))\,d\theta\,\vec{e}_x - \sin(\theta(t))\,d\theta\,\vec{e}_y\\ d\vec{e}_\theta &= -d\theta\left(\cos(\theta(t))\,\vec{e}_x + \sin(\theta(t))\,\vec{e}_y\right)\end{aligned}$$

$$d\vec{e}_\theta = -d\theta\,\vec{e}_\rho$$

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z = \left|\begin{array}{c}\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\\ \ddot{z}\end{array}\right.}$$

III.3) Repère sphérique

- Le repère sphérique est orthonormé, constitué de trois vecteurs unitaires $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ formant une base directe.
- Nous étudions le mouvement par rapport au référentiel d'observation $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Les trois vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ sont mobiles.
- Le repère sphérique est donc un repère d'espace. Il est très adapté pour décrire des mouvements dans un système à symétrie sphérique (géographie, mouvement à force centrale…)

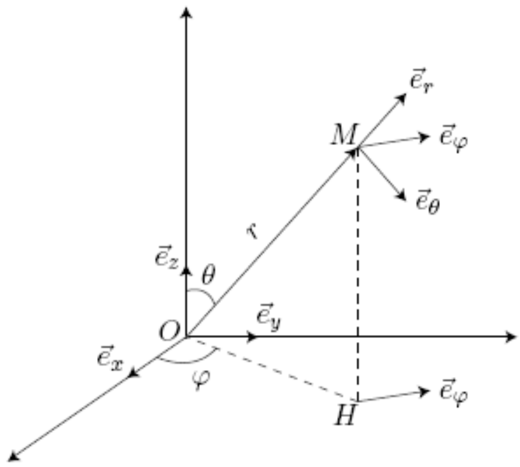
III.3.1) Vecteur position

La position d'un point quelconque M dans ce repère est définie à partir du point origine O par ses coordonnées (r, θ, φ).

r = $\|\overrightarrow{OM}\|$ donc

$$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r}$$



Expression des vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ dans la base $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

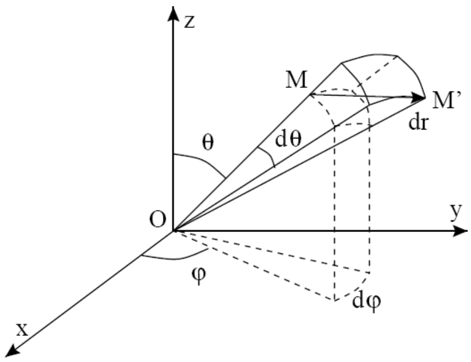
$$\vec{e}_r = \left| \begin{array}{c} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{array} \right.$$

$$\vec{e}_\theta = \left| \begin{array}{c} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{array} \right.$$

$$\vec{e}_\varphi = \left| \begin{array}{c} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{array} \right.$$

III.3.2) Vecteur déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{dl} = d(\overrightarrow{OM}) = dr\,\vec{e}_r + r\,d\vec{e}_r = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)d\varphi\,\vec{e}_\varphi$$



$$\overrightarrow{dl} = d(\overrightarrow{OM}) = \left| \begin{array}{c} dr \\ rd\theta \\ r\sin(\theta)d\varphi \end{array} \right.$$

III.3.3) Vecteur vitesse

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left| \begin{array}{c} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r\dot{\varphi}\sin(\theta) \end{array} \right.$$

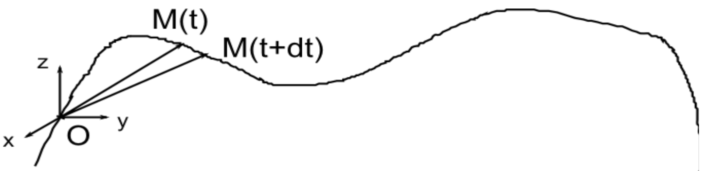
<u>Remarque</u> : il ne faut pas confondre à ce stade référentiel et repère. L'expression précédente traduit bien la vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$. Cependant nous utilisons le repère d'espace sphérique pour l'exprimer.

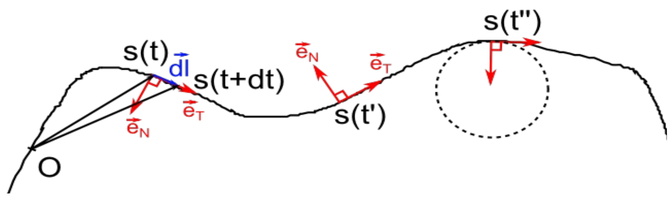
III.3.4) Vecteur accélération

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \left| \begin{array}{c} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \ - r\dot{\varphi}^2\sin^2(\theta) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ r\ddot{\varphi}\sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta) + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\theta) \end{array} \right.$$

III.4) Repère de Frenet

Ce repère est très adapté à l'analyse de mouvement dont on connaît la trajectoire. Les coordonnées cartésiennes du point $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ définissent une trajectoire à laquelle on peut associer une abscisse curviligne $s(t)$ qui représente la distance parcourue entre O et le point M à l'instant t.





Le repère de Frenet est défini par trois vecteurs orthonormés $\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_B$ mobiles dans le repère d'observation $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$.

$\vec{e}_B$ est normal au plan défini par $\vec{e}_T$ et $\vec{e}_N$ appelé plan « osculateur ». On a :

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N$$

III.4.1) Expression de la position

Dans le repère de Frenet, nous ne pouvons pas définir explicitement le vecteur $\overrightarrow{OM}$. La position du point M est repérée dans le temps par l'abscisse curviligne $s(t)$ sachant que la trajectoire est connue. Il est très important de noter que $s(t)$ est un **scalaire**. Elle est homogène à une longueur.

III.4.2) Vecteur déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{dl} = d\left(\overrightarrow{OM}\right) = ds\ \vec{e}_T$$

$$\left\|\overrightarrow{dl}\right\| = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2}$$

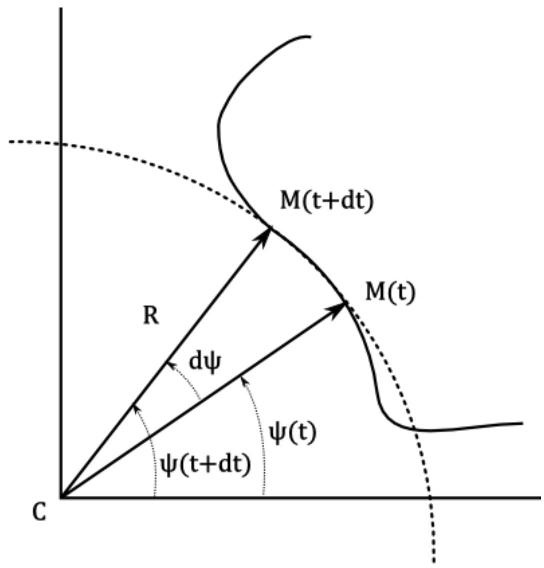
Nous pouvons définir le vecteur $\vec{e}_T$ à partir de la différentielle $d\left(\overrightarrow{OM}\right)$:

$$\boxed{\vec{e}_T = \frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{ds}}$$

III.4.3) Vecteur vitesse

Dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$:

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \frac{ds}{dt}\ \vec{e}_T = \dot{s}\ \vec{e}_T = \left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|\ \vec{e}_T}$$



III.3.4) Vecteur accélération

Dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$:

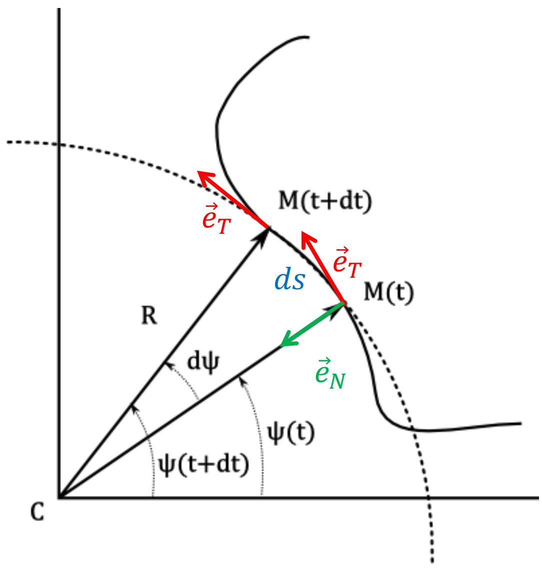
$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\ \vec{e}_T\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d^2 s}{dt^2}\ \vec{e}_T + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{d\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|}{dt}\ \vec{e}_T + \left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|\ \frac{d\vec{e}_T}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\vec{e}_N$$

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{ds}{ds}\frac{d\psi}{dt}\vec{e}_N = \frac{d\psi}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{e}_N$$

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{d\psi}{ds}\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|\vec{e}_N$$



ds correspond à l'arc de cercle de rayon de courbure R définit par l'angle $d\psi$, avec :

$$R = \lim_{dt \to 0} \frac{M(t+dt)M(t)}{\psi(t+dt) - \psi(t)} = \frac{ds}{d\psi}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|}{R}\vec{e}_N \Longrightarrow \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|}{dt}\vec{e}_T + \frac{\left\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\right\|^2}{R}\vec{e}_N}$$

CHAPITRE 2
Dynamique d'un point matériel, les trois lois de Newton

Les « savoir-faire » à acquérir par l'étudiant en fin de chapitre

- Comprendre **la notion de force** et savoir **représenter sous forme vectorielle** une force donnée.

- **Connaître l'expression des forces usuelles.**

- Etre capable d'**établir un bilan de forces** sur un système défini.

- Comprendre la **notion d'inertie**.

- Etre capable d'utiliser le **Principe Fondamental de la mécanique** et le **théorème du moment cinétique** pour déterminer le mouvement d'un point matériel dans un référentiel galiléen.

Introduction

- La mise en mouvement d'un objet nécessite une force d'autant plus grande que la masse est grande.

- La déviation de la trajectoire d'un objet en mouvement nécessite une force d'autant plus grande que la vitesse est grande.

- Ces deux affirmations sont formalisées par la notion d'inertie. Plus un objet est massif et/ou rapide plus il est difficile de modifier son mouvement. La quantité de mouvement qui est le produit de la vitesse par la masse permet en quelque sorte de « mesurer l'inertie ».

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

- la notion de direction et d'amplitude d'une force $\Longrightarrow$ les vecteurs seront l'outil pour décrire les forces.

I-Définitions

I.1) Notion de masse

- La masse dite « inerte » est un **scalaire** qui caractérise la réponse (le mouvement) d'un objet à une force.

- C'est une grandeur additive dont l'unité est le kilogramme (kg).

- En mécanique classique, la masse d'un point matériel est **invariante dans le temps** et ne dépend pas des référentiels, c'est une **caractéristique intrinsèque** du point matériel.

- Nous parlons de masse « grave » pour caractériser l'interaction gravitationnelle.

- Dans l'état actuel des connaissances, la masse inerte = la masse grave.

I.2) Notion de quantité de mouvement

- La quantité de mouvement $\vec{p}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

- Son unité est le kg.m.s^{-1}.
- $\vec{p}$ dépend du référentiel choisi.
- $\vec{p}$ est qualifiée de moment linéaire.

I.3) Notion de force

- Un point matériel de masse *m* peut **subir des forces exercées** par des objets extérieurs. Ces forces peuvent se faire **à distance ou par contact**.
- Les forces sont modélisées par **des vecteurs** afin de préciser dans quelle direction, dans quel sens et avec quelle amplitude se fait l'interaction.
- La force qu'exerce un corps 1 sur un corps 2, est notée

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2}}$$

- La force d'un corps 1 sur un corps 2 est souvent associée à un point d'application pour les forces de contact.
- Dans le cas d'interaction à distance la force s'applique sur la globalité du corps matériel.

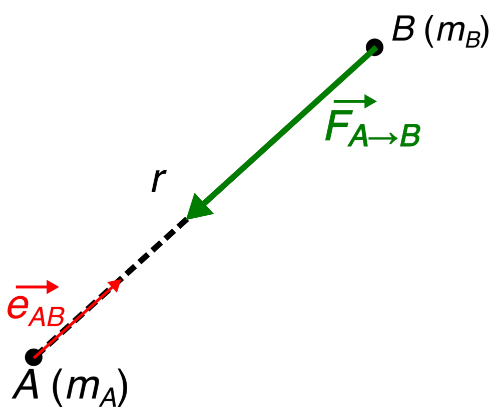
I.3) Notion de force

- La force subie par un système est **indépendante** du référentiel d'étude choisi.
- L'unité de la force dans le système international est le Newton (N), 1N = 1kg.m.s^{-2}.
- Lorsque plusieurs forces agissent sur un point matériel, la force totale subie par le corps est la somme des forces appliquées sur le corps.

$$\boxed{\vec{F}_{ext\rightarrow 1} = \sum_i \vec{F}_{i\rightarrow 1}}$$

II-Forces usuelles

II.1) La force de gravitation



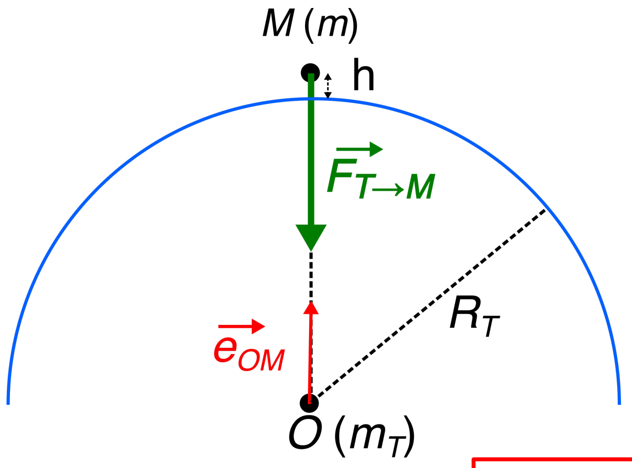
- La force ou interaction gravitationnelle est une force à distance **attractive** qui agit entre deux corps massiques.
- L'expression de la force exercée par un corps A de masse m_A (unité kg) **sur** un corps B de masse m_B (unité kg) se note:

$$\boxed{\vec{F}_{A\rightarrow B} = -\vec{F}_{B\rightarrow A} = -G\,\frac{m_A m_B}{r^2}\,\vec{e}_{AB}}$$

avec G la constante gravitationnelle

$$G = 6{,}67\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-2}}$$

II.1) La force de gravitation sur Terre



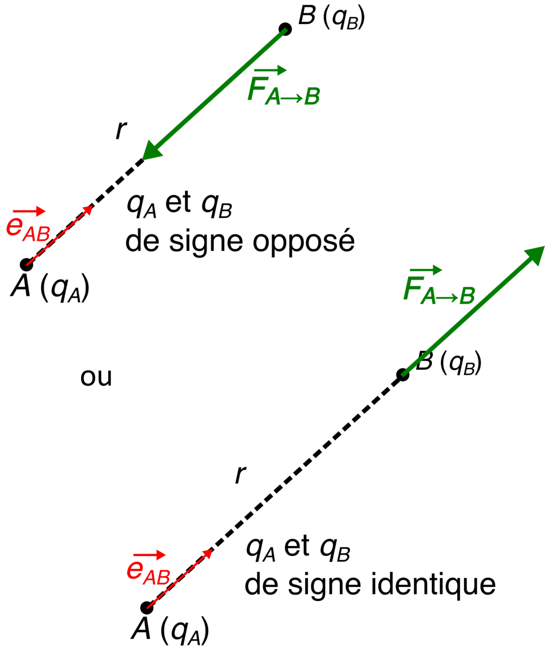
Dans le cas de l'interaction entre un corps placé au point *M* de masse *m* situé à une hauteur *h* de la surface terrestre on simplifie l'expression de la manière suivante :

$$\boxed{\vec{F}_{T\to M} = -G\,\frac{m_T m}{(R_T+h)^2}\,\vec{e}_{OM} \approx -mG\,\frac{m_T}{{R_T}^2}\,\vec{e}_{OM} \approx m\vec{g}}$$

$$\boxed{\vec{g}\ \text{est appelé l'accélération de la pesanteur}}$$

$||\vec{g}|| \approx 9,81$ m.s^{-2}

II.1) La force électrique ou de Coulomb



- La force électrique est une force ou interaction à distance **attractive ou répulsive** entre **deux particules chargées**.
- L'expression de la force exercée par un corps *A* de charge q_A (unité Coulomb (C)) sur un corps *B* de charge q_B dans le vide se note :

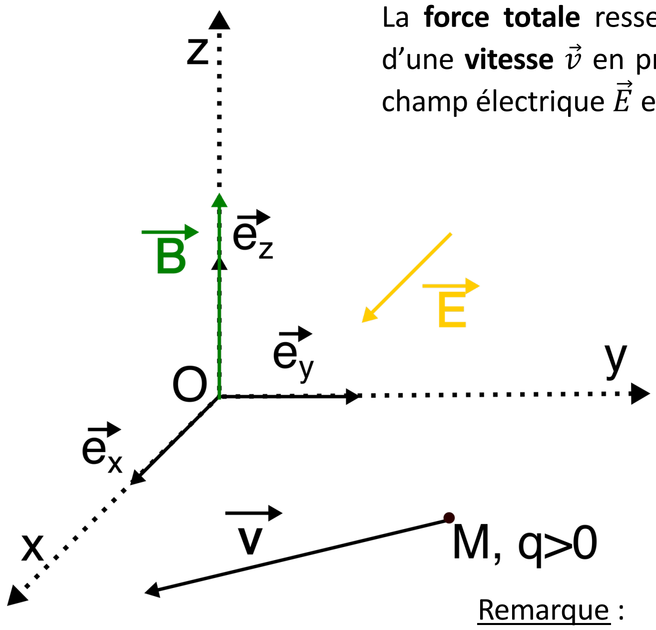
$$\boxed{\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_A\,q_B}{r^2}\,\vec{e}_{AB} = q_B\,\vec{E}_A(r)}$$

avec la permittivité du vide

$$\epsilon_0 = 8{,}85\ \ 10^{-12}\ \mathrm{C.V^{-1}.m^{-1}}$$

Remarque : $\vec{E}_A(r)$ représente le champ électrique créé par l'objet *A* au point *B*, cette quantité dépend uniquement de la source *A* et non de l'objet subissant la force

II.3) La force électromagnétique de Lorentz



La **force totale** ressentie par une charge électrique q animée d'une **vitesse** $\vec{v}$ en présence d'un champ magnétique $\vec{B}$ et d'un champ électrique $\vec{E}$ est appelée **force de Lorentz**. Elle s'écrit :

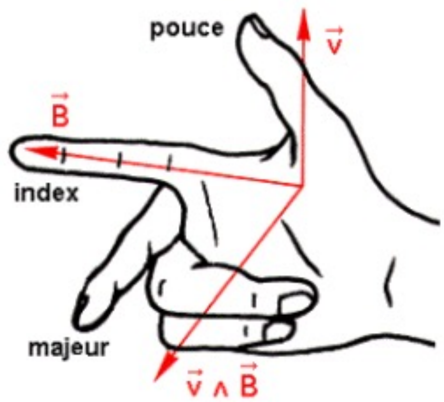
$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

Remarque :
$\vec{E}$ est généré par des charges fixes alors que $\vec{B}$ est généré par des courants électriques (charges mobiles).

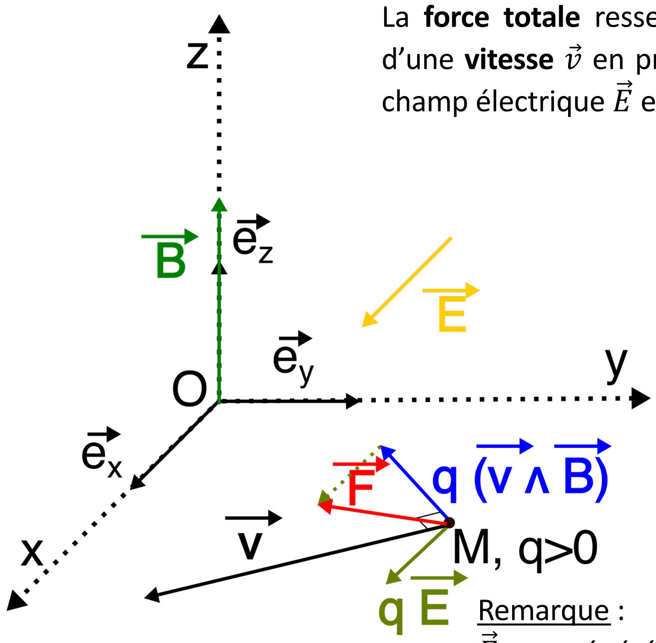
II.3) La force électromagnétique de Lorentz

$$\boxed{\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

« Règle des trois doigts »
de la **main droite (q>0)**



II.3) La force électromagnétique de Lorentz



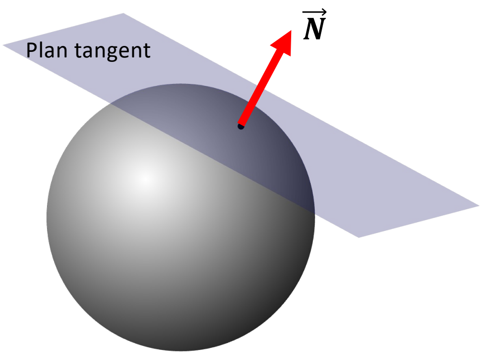
La **force totale** ressentie par une charge électrique q animée d'une **vitesse** $\vec{v}$ en présence d'un champ magnétique $\vec{B}$ et d'un champ électrique $\vec{E}$ est appelée **force de Lorentz**. Elle s'écrit :

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)}$$

Remarque :
$\vec{E}$ est généré par des charges fixes alors que $\vec{B}$ est généré par des courants électriques (charges mobiles).

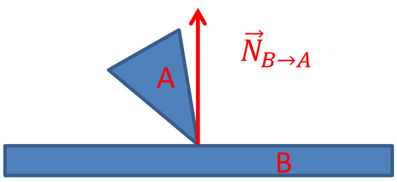
II.4) Les forces de contact et de frottements

II.4.1) Les forces de réactions



- Les forces de réaction sont toujours dirigées selon la normale à la surface de contact (plan tangent) entre deux corps.
- elles sont souvent représentées par la notation $\vec{N}$.
- Les forces de réaction traduisent le fait que deux corps solides ne peuvent pas s'interpénétrer.

$$\boxed{\vec{N}_{A \to B} = -\vec{N}_{B \to A}}$$



Remarque : on note aussi souvent les forces de réaction $\vec{R}$

II.4) Les forces de contact et de frottements

II.4.2) Les forces de frottements de glissement solide

La force de frottement de glissement solide **s'oppose toujours au mouvement du corps**.
Il y a:
- la force de **frottement statique**, c'est la force nécessaire avant de pouvoir mettre en mouvement le solide.

$$\boxed{\|\vec{f_g}\| = f_s\|\vec{N}\|}$$

f_S est le coefficient statique de frottement (sans unité).

- la force de **frottement de glissement** telle que

$$\boxed{\vec{f_g} = -f_c\|\vec{N}\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}$$

f_c est le coefficient de frottement dynamique (sans unité), $f_s > f_c$.

II.4) Les forces de contact et de frottements

II.4.3) Les forces de frottements visqueux

La force de **frottement visqueux** apparaît lorsqu'un **corps solide se déplace au sein d'un milieu fluide type gaz ou liquide**.

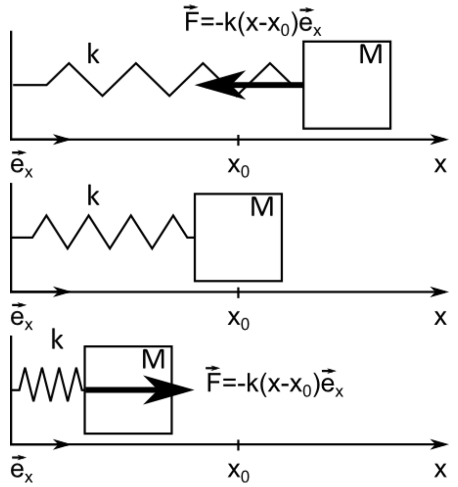
- C'est une force de contact comme la force de frottement de glissement solide.
- Elle est due aux chocs engendrés par les molécules libres du fluide sur le corps solide.
- En 1re approximation et pour de faibles vitesses, on peut écrire :

$$\boxed{\vec{f_v} = -\kappa.\eta.\vec{v}}$$

κ est un coefficient lié à la forme du corps solide,
η est le coefficient de viscosité ($kg.s^{-1}$) du fluide considéré.

<u>Remarque</u> : on la trouve souvent sous la forme $\vec{f_v} = -\alpha\,\vec{v}$ avec α le coefficient de frottements ($kg.s^{-1}$).

II.5) La force de rappel d'un ressort ou force élastique



La force de rappel d'un ressort est une force de type élastique. Elle s'exprime par :

$$\boxed{\vec{F} = -k(x - x_0)\,\vec{e}_x}$$

où k (N.m^{-1}) est la constante de raideur du ressort.
x_0 est la longueur à vide du ressort (position équilibre)
x est la longueur à un instant t du ressort.

Remarque : elle est très utilisée pour modéliser le comportement de système flexible et/ou oscillant: la corde d'une guitare, une poutre en béton, pont suspendu…

III) Les lois de la dynamique d'un point matériel

III.1) Principe d'inertie (1re loi de Newton)

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, un point matériel isolé (n'étant soumis à aucune force) se déplace toujours avec une vitesse constante ($\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_o$), c'est à dire sans accélération. La trajectoire d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme.

- L'état *au repos* d'un système est celui pour lequel $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_o$, donc il n'est pas nécessaire de lui appliquer continuellement une force pour le maintenir à vitesse constante. **Le mouvement n'a donc pas besoin de force pour exister!**

- Il est à l'origine d'une loi fondamentale de la physique moderne, **la loi de conservation de la quantité de mouvement:**

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{0}}$$

Remarque : cette loi s'applique aussi pour un corps constitué d'une multitude de points matériels.

III.2) Principe fondamentale de la dynamique (2e loi de Newton)

Il faut une force pour modifier le mouvement rectiligne uniforme en direction et/ou amplitude.

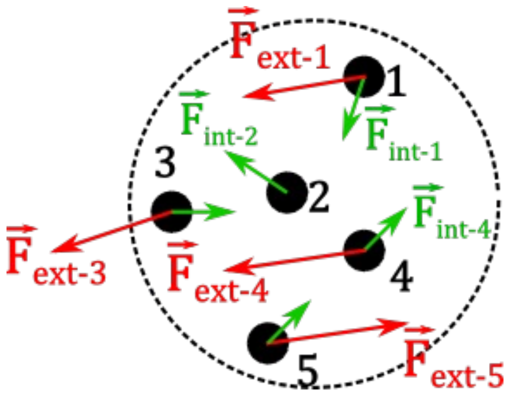
La 2nde loi de Newton relit l'effet des forces extérieures $\vec{F}_{ext\to M}$ et l'accélération du point matériel.

Dans **un référentiel galiléen** $\mathcal{R}$ elle s'écrit de la façon suivante :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext\to M} = \frac{d\vec{p}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = m\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}} \Rightarrow \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{\sum \vec{F}_{ext\to M}}{m}}$$

<u>Remarque</u> : La 1re loi de Newton est contenue dans la 2nde. En fait la 2nde se suffit à elle-même mais historiquement le principe d'inertie a été le 1er à être mis en évidence, d'où son importance.

III.3) PFD sur un ensemble de points matériels et principe d'action réaction (3e loi de Newton)



Le **centre d'inertie** ou **barycentre de masse** C d'un ensemble de points matériels est défini comme suit :

$$M\,\overrightarrow{OC} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA}_i \text{ avec } M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Le PFD s'écrit pour un ensemble de N points matériels de la façon suivante:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext\to i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_{i/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA}_i\right)\Big|_{\mathcal{R}}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext\to i} = M\frac{d^2\overrightarrow{OC}}{dt^2}\Big|_{\mathcal{R}} = M\frac{d\vec{v}_{C/\mathcal{R}}}{dt} = M\vec{a}_{C/\mathcal{R}}}$$

Les forces intérieures ne jouent pas de rôle dans l'accélération du centre de masse C de l'ensemble des N points matériels.

On considère un système de deux points matériels A et B en interaction l'un avec l'autre mais sans interaction extérieure, le système est dit isolé.

$$\vec{F}_{B\to A} = m_A \frac{d\vec{v}_{A/\mathcal{R}}}{dt} \qquad \vec{F}_{A\to B} = m_B \frac{d\vec{v}_{B/\mathcal{R}}}{dt}$$

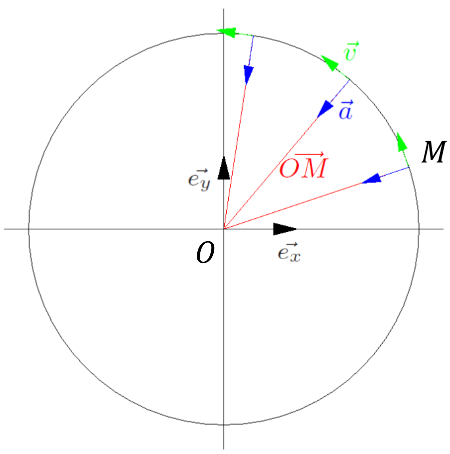
$$\Rightarrow \vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_{A\to B} = m_A \frac{d\vec{v}_{A/\mathcal{R}}}{dt} + m_B \frac{d\vec{v}_{B/\mathcal{R}}}{dt}$$

$$\text{or} \quad m_A \frac{d\vec{v}_{A/\mathcal{R}}}{dt} + m_B \frac{d\vec{v}_{B/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_{A\to B} = \vec{0}}$$

3e loi de Newton :
Lorsque deux systèmes sont en interaction, la force qui s'exerce sur un des systèmes est égale et opposée à la force qui s'exerce sur l'autre, c'est le principe d'action-réaction.

III.4) Théorème du moment cinétique



Lorsque le mouvement du point est en translation rectiligne uniforme, $\vec{p}$ est une constante. Pourrait-on imaginer une quantité similaire permettant de décrire l'uniformité du mouvement de rotation d'un point ?

Soit un point matériel M en **rotation uniforme** (rayon R et vitesse angulaire ω) autour de l'axe (Oz). Dans le repère cylindrique, sa vitesse est donnée par l'expression:

$$\boxed{\vec{v} = R\,\omega\,\vec{e}_\theta \;\text{ et }\; \vec{p} = m\,R\,\omega\,\vec{e}_\theta}$$

Ce n'est donc pas une constante puisque $\vec{e}_\theta$ tourne. Les trois informations importantes permettant de caractériser un mouvement circulaire sont l'axe de rotation, la vitesse angulaire de rotation ainsi que le rayon R.

On définit alors une nouvelle quantité, appelée moment cinétique de rotation.
Elle est notée $\vec{L}$ et s'écrit de la façon suivante:

$$\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}}$$

Dans notre exemple $\vec{L}_O = R\,\|p\|\,\vec{e}_z = m\,R^2\,\omega\,\vec{e}_z$. C'est bien une constante.

Si on dérive par rapport au temps l'expression du moment cinétique par rapport à un point fixe C dans le référentiel, nous obtenons :

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \frac{d\overrightarrow{CM}}{dt} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{CM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM}\right)}{dt} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{CM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{CM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \overrightarrow{CM} \wedge \sum_i \vec{F}_{ext\to i} = \sum_i \overrightarrow{CM} \wedge \vec{F}_{ext\to i}$$

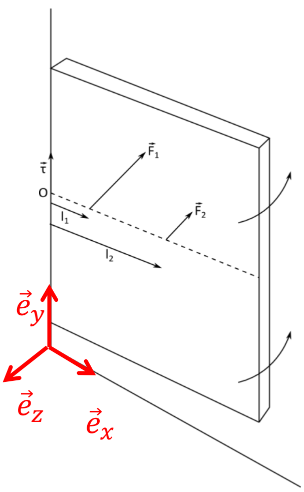
Ainsi on définit le **théorème du moment cinétique**:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{C,ext\to i}}$$

$\vec{\mathcal{M}}_{C,ext\to i} = \overrightarrow{CM} \wedge \vec{F}_{ext\to i}$

est le moment de la force $\vec{F}_{ext\to i}$ par rapport au point C

<u>Exemple</u> :



$$\vec{\mathcal{M}}_{O,F_1} = l_1 F_1 \vec{e}_y$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{O,F_2} = l_2 F_2 \vec{e}_y$$

Pour la même rotation de la porte
comme $l_2 > l_1$
$F_2 < F_1$

CHAPITRE 3
Travail et énergie

Les « savoir-faire » à acquérir par l'étudiant en fin de chapitre

- Savoir calculer **le travail exercé par une force** sur un trajet donné.
- Savoir appliquer **le théorème de l'énergie cinétique** pour déterminer le mouvement d'un point matériel.
- Savoir déterminer **l'énergie potentielle** associée à une force conservative.
- Etre capable d'utiliser **le théorème de l'énergie mécanique** pour analyser et prédire qualitativement une trajectoire.

Introduction

L'énergie est une quantité que l'on peut:
- convertir = utiliser (carburant, énergie électrique…)
- stocker (batterie,…)
- transférer.

Dans la vie courante, le terme travail est largement moins utilisé que le terme énergie, nous verrons que le **travail correspond au transfert d'énergie**.

Le concept d'énergie est né avec la mécanique classique, avec les définitions de
- l'énergie cinétique
- l'énergie potentielle
- l'énergie mécanique.

C'est au 19ème siècle que ce concept fut généralisé à toutes les sciences (thermodynamique, chimie etc…) grâce à la formulation du théorème de conservation de l'énergie par le Dr J. Mayer (médecin), avec les 1ère vérifications expérimentales de J. Joule puis de von Helmholtz.

Le principe de conservation de l'énergie est un des fondements de la science moderne.

I) Reformulation du PFD

- Le PFD décrit la variation au cours du temps de la quantité de mouvement d'un objet sous l'action d'une force.

- Il est utile selon les expériences d'avoir une **vision spatiale plutôt que temporelle**. *Elévation d'un objet à une altitude supérieure, distance de freinage d'une voiture ou distance d'accélération d'un avion…*

PFD classique (formulation temporelle) : $\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \implies m\,d\vec{v} = \vec{F}dt}$

Reformulation du PFD sous une forme spatiale :

$$\overrightarrow{dl} = \vec{v}dt \implies m\,d\vec{v}.\vec{v} = \vec{F}.\vec{v}dt$$

$$\boxed{m\,d\vec{v}.\vec{v} = \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$$

<u>Remarque</u> :

$$d\left(\frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}d(\vec{v}.\vec{v}) = \vec{v}.d\vec{v} \implies d\left(\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2\right) = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

II) Energie cinétique et travail

II.1) Energie cinétique

L'énergie cinétique caractérise l'énergie de «mouvement» emmagasinée par un corps en déplacement. On pose :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2}$$

Elle caractérise le mouvement du corps tout comme la quantité de mouvement, cependant ce n'est pas une «reformulation de la quantité de mouvement» mais bien une nouvelle façon de caractériser le mouvement car ce n'est pas le vecteur vitesse qui est utilisé mais la norme de la vitesse au carré.

L'énergie cinétique a pour unité le Joule (J).
Un joule vaut 1 N.m ou encore 1 kg.m^2.s^{-2}.

II.2) Travail et puissance d'une force

Le travail infinitésimale δW effectué par une force $\vec{F}$ est :

$$\boxed{\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$$

Sur un parcours donné nous pouvons calculer le travail total effectué par la force $\vec{F}$ de la façon suivante :

$$\boxed{W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$$

Le travail correspond au transfert d'énergie du système qui applique la force $\vec{F}$ à la masse m qui gagne (ou perd) en énergie cinétique. Le travail a pour unité le Joule (J).

On définit la puissance d'une force de la façon suivante :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\vec{v}}$$

son unité est le Watt ou $J.s^{-1}$.

II.3) Théorème de l'énergie cinétique

La reformulation du PFD sous une forme spatiale peut se mettre sous la forme intégrale suivante :

$$\int_A^B d\left(\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2\right) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

$$\left[\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2\right]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A\to B}$$

$$\boxed{E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}}$$

Relation spatiale qui lie forces et mouvements.
La variation d'énergie cinétique correspond au travail des forces appliquées sur *m*, donc au passage de l'énergie venue des forces extérieures vers la masse *m.*

II.4) Signification du travail

- le travail d'une force $\Longleftrightarrow$ un transfert d'énergie
- Lorsque la force appliquée sur un objet engendre un déplacement d'un point A à un point B, elle lui communique une vitesse, donc lui donne de l'énergie de «mouvement».
- L'énergie passe du système « extérieur » qui applique la force au point matériel. Pour préciser ce propos revenons à l'expression du travail :

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

Dans le repère de Frenet nous pouvons écrire :

$$\vec{F} = F_T\ \vec{e}_T + F_N\,\vec{e}_N \quad \text{et} \quad \overrightarrow{dl} = ds\,\vec{e}_T$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B (F_T\,\vec{e}_T + F_N\,\vec{e}_N)\,.\,ds\,\vec{e}_T = \int_A^B F_T\,ds$$

Seule la composante tangentielle de la force travaille !
En effet d'après $\vec{F} = m\vec{a}$ dans la base de Frenet :

$$F_T\,\vec{e}_T + F_N\,\vec{e}_N = m\,\frac{dv}{dt}\vec{e}_T + m\,\frac{v^2}{R}\vec{e}_N \Longrightarrow m\,\frac{dv}{dt} = F_T$$

- Seule une force tangentielle au mouvement modifie son énergie cinétique, une force perpendiculaire au déplacement d'un objet ne lui communique pas d'énergie cinétique.

- Il y a donc une différence entre énergie cinétique et quantité de mouvement.

- Une **force normale au déplacement modifie la quantité de mouvement** donc la trajectoire **mais ne change pas la norme de la vitesse** donc l'énergie stockée.

- Une **force tangentielle au mouvement modifie l'énergie cinétique et la quantité de mouvement**.

- Si $W_{A\to B} > 0$, la force accélère le point matériel, si $W_{A\to B} < 0$, la force s'oppose au mouvement donc décélère le point matériel.

- Travail de forces usuelles :

force de réaction $\quad W_{A\to B}^{\vec{N}} = \int_A^B \vec{N}.\overrightarrow{dl} = 0$ car $\vec{N} \perp \overrightarrow{dl}$

force de frottement $\quad W_{A\to B}^{\vec{f}} = \int_A^B \vec{f}.\overrightarrow{dl} < 0$ car $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

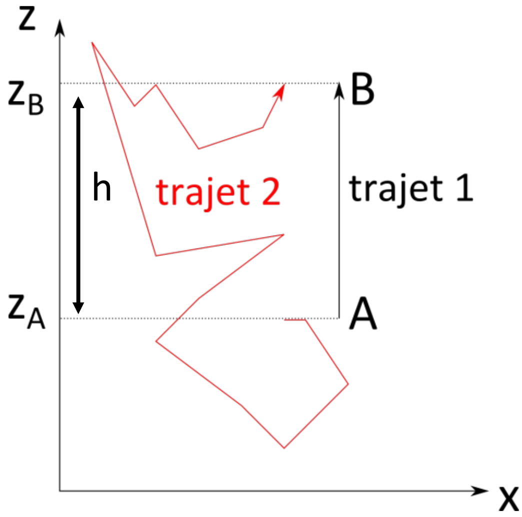
III) Energie potentielle et forces conservatives

III.1) Forces non conservatives et forces conservatives

Lorsque l'on calcule le travail d'une force sur un trajet donné, nous rencontrons deux cas de figures :

- Le travail **final ne dépend que de ce qui se passe au point final B et au point initial A de la trajectoire** et non de la manière dont on passe de A à B. On dit alors que **la force est conservative**.

- Le **travail final dépend du chemin pour passer du point initial A au point final B**. On dit alors que **la force est non conservative**.



Exemple de force conservative :
la force de pesanteur $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{P}.\overrightarrow{dl}$$

$$= \int_A^B -mg\vec{e}_z.\left(dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z\right)$$

$$= \int_A^B -mgdz = -mg[z_B - z_A] = -mgh$$

Exemple de force non conservative :
la force de frottement $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\, v\, \vec{e}_T$.
Si le point matériel se déplace à vitesse constante :

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{f}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B -\alpha\, v\, \vec{e}_T.(ds\,\vec{e}_T) = \int_A^B -\alpha\, v\, ds = -\alpha\, v \int_A^B ds$$

III.2) Energie potentielle

On associe aux forces conservatives une fonction appelée énergie potentielle E_P. Le travail correspond à la différence d'énergie potentielle entre le point final et le point initial.

$$\boxed{W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -\Delta E_p = -E_p(B) + E_p(A)}$$

$$\boxed{\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -dE_p}$$

La force dérive alors d'une énergie potentielle.
En utilisant le repère cartésien :

$$\vec{F}.\overrightarrow{dl} = \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$$

$$\Longrightarrow$$

$$F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = -\frac{\partial E_p}{\partial x}dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

$$\Longrightarrow$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

III.3) Exemple d'énergie potentielle

Force de pesanteur

Dans le cas de la force de pesanteur, l'énergie potentielle dépend de la hauteur de la masse :

$$E_p(z) = mgz + C^{ste}$$

On peut fixer arbitrairement $E_p = 0$ lorsque $z = 0$

$$\boxed{E_p(z) = mgz}$$

<u>Remarque</u> : on parle de l'énergie potentielle de la masse mais en fait il faudrait dire l'énergie potentielle du système terre-masse.

Force de rappel d'un ressort

La force de rappel d'un ressort s'écrit $\vec{F} = -k\,(x - x_0)\,\vec{e}_x$.

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \int_A^B -k\,(x - x_0)\,dx = -\frac{1}{2}\,k\,(x_B - x_0)^2 + \frac{1}{2}\,k\,(x_A - x_0)^2$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = k\,(x - x_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2}\,k\,(x - x_0)^2 + C^{ste}$$

Comme pour la force de pesanteur on peut poser que E_p est nulle lorsque $x = x_0$:

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}\,k\,(x - x_0)^2}$$

Force électrique

La force électrique subie par une charge placée dans un champ électrique $\vec{E} = E\,\vec{e}_x$ s'écrit $\vec{F} = qE\,\vec{e}_x$.

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \int_A^B q\,E\,dx = qE(x_B - x_A)$$

Le travail ne dépend que de la position initiale et finale.

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = -qE$$

$$E_p = -q\,E\,x + C^{ste}$$

Comme pour la force de pesanteur on pose que E_p est nulle lorsque $x = 0$:

$$\boxed{E_p = -q\,E\,x}$$

IV) Energie mécanique

IV.1) Théorème de l'énergie mécanique

Considérons une masse soumise à la fois à des forces conservatives et des forces non conservatives. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors de la façon suivante :

$$E_c(B) - E_c(A) = W^{c}_{A\to B} + W^{nc}_{A\to B} = -E_p(B) + E_p(A) + W^{nc}_{A\to B}$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + W^{nc}_{A\to B}$$

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W^{nc}_{A\to B}$$

$$\boxed{\Delta E_m = W^{nc}_{A\to B}}$$

Théorème de l'énergie mécanique
La variation d'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle d'un point matériel, est égale aux travaux des forces non conservatives appliquées au système.

Dans le cas où le point matériel n'est soumis qu'à des forces conservatives, la variation d'**énergie mécanique est nulle** :

$$\boxed{\Delta E_m = 0}$$

Ainsi **l'énergie mécanique** du point est **une constante du mouvement.**

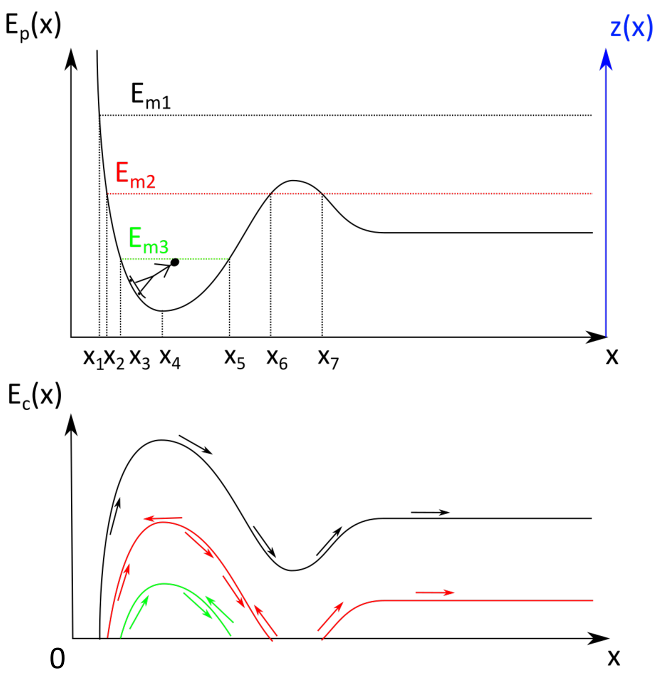
Ce théorème de mécanique a donné naissance à une loi fondamentale des sciences modernes, **la loi de conservation de l'énergie** ou **principe de conservation de l'énergie**.

IV.2) Puit et barrière d'énergie potentielle signification de l'énergie potentielle

Le théorème de l'énergie mécanique est un outil puissant dans certaines situations, il permet d'appréhender la dynamique d'un système très simplement.

Lorsque l'énergie potentielle forme des creux et des bosses appelés respectivement puits et barrières, il est assez aisé de prédire la trajectoire d'un point matériel.

Considérons une énergie potentielle $E_P(x)$ dépendant d'une seule variable x.
Situation équivalente à l'énergie potentielle de gravitation d'un skateboarder ne subissant aucun frottement sur une piste vallonnée. Avec plusieurs valeurs initiales de l'énergie mécanique :



L'énergie potentielle est une énergie de position qui est stockée en un point, elle est inscrit dans « l'espace », et potentiellement libérable pour fournir de l'énergie cinétique à un objet.

Remarque :
Problème identique pour l'E_p d'un ressort ou Force de Coulomb (F_{el}).

CHAPITRE 4 : Changement de référentiel composition des mouvements dynamique dans un référentiel non galiléen

Les « savoir-faire » à acquérir par l'étudiant en fin de chapitre

- Bien connaitre les **notions de référentiel, repère et base**.
- Connaître **la loi de composition des vitesses et des accélérations**.
- Comprendre la **notion de référentiel galiléen et non galiléen**.
- Savoir appliquer le **PFD dans un référentiel non galiléen**.

I) Composition de vitesse et accélération

I.1) Dérivée d'un vecteur dans deux référentiels différents

Soit un référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ considéré fixe,
un référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ mobile par rapport à $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$:

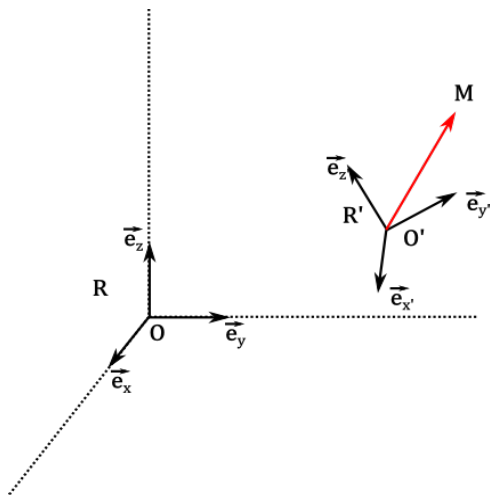
$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{d\left(u_{x'}\,\vec{e}_{x'} + u_{y'}\,\vec{e}_{y'} + u_{z'}\,\vec{e}_{z'}\right)}{dt}$$

$$= \dot{u_{x'}}\,\vec{e}_{x'} + \dot{u_{y'}}\,\vec{e}_{y'} + \dot{u_{z'}}\,\vec{e}_{z'} + u_{x'}\,\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + u_{y'}\,\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + u_{z'}\,\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}$$

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{u_{x'}}\,\vec{e}_{x'} + \dot{u_{y'}}\,\vec{e}_{y'} + \dot{u_{z'}}\,\vec{e}_{z'} + u_{x'}\left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{x'}\right) + u_{y'}\left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{y'}\right) + u_{z'}\left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{z'}\right)$$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}}$$

I.2) Composition des vitesses

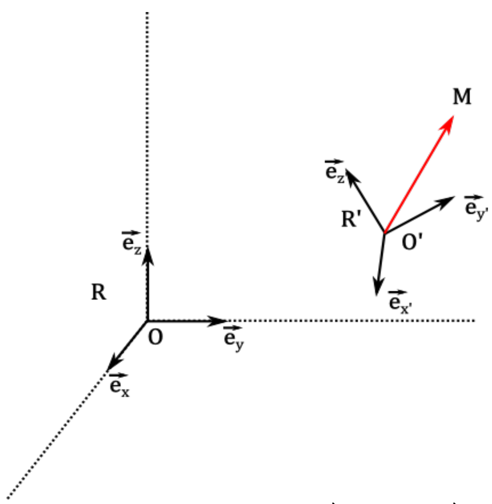


La vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ est notée $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$.

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\ \vec{e}_x + \dot{y}\ \vec{e}_y + \dot{z}\ \vec{e}_z}$$

La vitesse du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ est notée $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$.

$$\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x}'\ \vec{e}_{x'} + \dot{y}'\ \vec{e}_{y'} + \dot{z}'\ \vec{e}_{z'}}$$



Avec la relation entre les coordonnées de M dans $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ et $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$= \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$= \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{M \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

Remarque : $\vec{v}_{M \in \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est appelée la vitesse d'entrainement du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

I.3) Composition des accélérations

L'accélération du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ est notée $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$.

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

L'accélération du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ est notée $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$.

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} = \ddot{x}'\,\vec{e}_{x'} + \ddot{y}'\,\vec{e}_{y'} + \ddot{z}'\,\vec{e}_{z'}$$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$= \left.\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

Or $\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}\right) + 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$$

l'accélération d'entrainement du référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ est :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ **l'accélération de Coriolis**.

I.4) Référentiel, repère et base

Ne pas confondre *référentiel*, *repère d'espace* et *base*.

Le mouvement d'un point matériel restera toujours le même si on ne change pas de référentiel. Mais le mouvement d'un mobile ne sera pas le même suivant le référentiel dans lequel l'observateur se situe.

Ici on va apprendre comment passer d'un mouvement décrit dans un référentiel à un autre référentiel.

II) Dynamique dans un référentiel non galiléen

II.1) PFD dans un référentiel non galiléen

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t\right)$ le PFD s'écrit :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$$

Soit un référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ en mouvement par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

$$\sum_i \vec{F}_i = m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + m\,\vec{a}_e + m\,\vec{a}_c$$

$$\sum_i \vec{F}_i - m\,\vec{a}_e - m\,\vec{a}_c = m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}}$$

$\vec{F}_e = -m\,\vec{a}_e$ est la force inertielle d'entrainement

$\vec{F}_c = -m\,\vec{a}_c$ est la force inertielle de Coriolis

II.2) Précisions sur les référentiels galiléens

Si le référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}, t)$ est en **translation uniforme** par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$:

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0} \text{ et } \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_e = -m\vec{a}_e = \vec{0} \qquad \vec{F}_c = -m\vec{a}_c = \vec{0}$$

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}}$$

Un référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen est aussi galiléen.

Seuls les référentiels en mouvement accéléré (de translation, de rotation ou de translation / rotation) par rapport à un référentiel galiléen sont non-galiléens.

Comment être sûr qu'un référentiel est galiléen ?

1. On définit un référentiel $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ que l'on suppose galiléen
2. Bilan des forces réelles subies par le point matériel
3. Détermination des équations horaires du mouvement
4. Comparaison théorie-expérience

Si le mouvement est correctement décrit, le référentiel peut être considéré galiléen.

Si les prédictions théoriques ne permettent pas de reproduire le mouvement réel c'est que le référentiel est non-galiléen et qu'il faut tenir compte de forces inertielles.

II.3) Exemples de référentiel galiléen et non-galiléen

- Le **référentiel lié à la terre** n'est pas galiléen car la Terre a un **mouvement accéléré** (rotation propre et orbite autour du Soleil), mais si le temps de l'expérience est court et les vitesses de déplacement sont faibles, on pourra le considérer comme galiléen en première approximation.

- Le **référentiel géocentrique** (origine le centre de la Terre, trois axes pointant vers trois étoiles lointaines considérées immobiles), n'est pas galiléen (orbite autour du soleil). Cependant lorsque l'expérience est courte par rapport au temps mis par la Terre pour décrire une orbite complète autour du soleil, il peut être considéré galiléen. Ce référentiel est très adapté pour étudier l'effet de la rotation de la Terre.

- Le **référentiel de Copernic** dont l'origine se situe au barycentre du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles lointaines est supposé galiléen.