INSA TOULOUSE - Département GMM
Master MODIA - UF Modélisation et Calcul Scientifique

TD1 : Solution exaxte des systèmes hyperboliques linéaires du premier ordre à coefficients constants

On considère le système d'edp suivant

$$\partial_t U + A\partial_x U = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

associé à la condition initiale :

$$U(0,x) = U_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

où U est une fonction des variables t, x à valeur dans $\mathbb{R}^q$ avec q entier strictement positif, où U_0 est une fonction de la variable x à valeur dans $\mathbb{R}^q$ et où A est une matrice réelle constante de dimension $q \times q$ diagonalisable et à valeurs propres réelles.

Question 1. Donnez quelques exemples de systèmes de la forme (1) en Physique. Dans chacun des cas, précisez l'expression de la matrice A et calculez ses valeurs propres. Quelle est leur signification physique ?

Question 2. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ les q valeurs propres de A rangées par ordre croissant (éventuellement confondues) et $R_1, R_2, \ldots, R_q$ les vecteurs propres à droites correspondants, normalisés arbitrairement, et formant une base de $\mathbb{R}^q$. En vous servant du fait que A est diagonalisable à valeurs propres réelles, montrez que la solution du problème (1)-(2) a pour expression :

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{q} v_0^k(x - \lambda_k t)\, R_k \tag{3}$$

où par définition $v_0^1, v_0^2, \ldots, v_0^q$ sont les coordonnées de U_0 dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs propres de A : $\mathcal{B} = \{R_1, R_2, \ldots, R_q\}$. En déduire l'interprétation physique des réels λ_k.

Question 3. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^q$ dans la base $\mathcal{B}$. Par définition :

$$P = (R_1 R_2 \ldots R_q).$$

D'autre part, on note $L_1, L_2, \ldots, L_q$ les q vecteurs lignes de la matrice P^{-1}, qui par définition vérifient donc :

$$L_i R_j = \delta_{ij}$$

En déduire que la solution du problème (1)-(2) peut encore s'écrire :

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{q} (L_k U_0(x - \lambda_k t))\, R_k \tag{4}$$

On montrera également que les vecteurs L_i vérifient pour tout i :

$$L_i A = \lambda_i L_i,$$

et sont donc vecteurs propores à gauche de A.

....

On suppose maitenant que la condition initiale U_0 est de la forme :

$$U_0(x) = \begin{cases} U_g & si \quad x < 0 \\ U_d & si \quad x > 0 \end{cases} \tag{5}$$

où U_g et U_d sont deux vecteurs arbitraires de $\mathbb{R}^q$. Un problème de Cauchy pour lequel la condition initiale est de la forme (5), c'est à dire composée seulement de deux états constants séparés par une discontinuité localisée en $x = 0$, est appelé problème de Riemann. On verra qu'il joue un rôle important pour la construction de schémas volumes finis.

Question 4. On note $\Delta U_0^k = L_k(U_d - U_g)$ les coordonnées de $U_d - Ug$ dans la base $\mathcal{B}$. Par définition, on a donc :

$$U_d - U_g = \sum_{k=1}^{q} \Delta U_0^k R_k$$

En utilisant l'expression générale de la solution donnée par (4), montrez que la solution de (1)-(2)-(5) a pour expression pout tout $t > 0$:

$$U(t,x) = U_g + \sum_{k=1}^{q} \Delta U_0^k \; Y(x - \lambda_k t) \; R_k = \begin{cases} U_g & si & x/t < \lambda_1 \\ U_g + U_0^1 R_1 & si & \lambda_1 < x/t < \lambda_2 \\ ..... & .... & ..... \\ U_g + \displaystyle\sum_{k=1}^{i} \Delta U_0^k R_k & si & \lambda_i < x/t < \lambda_{i+1} \\ ..... & .... & ..... \\ U_d = U_g + \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \Delta U_0^k R_k & si & \lambda_q < x/t \end{cases} \tag{6}$$

où Y désigne la fonction de Heavyside sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la fonction qui vaut 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x > 0$.

On notera que la solution ne dépend que de la variable $\xi = x/t$. Représentez la structure de la soltion dans un diagramme (x,t) et dans un diagramme (ξ, U). Quel est le nombre de discontinuités de la solution pour $t > 0$? Donnez une interprétation physique de la solution.

Question 5. Montrer que la fonction flux, $F(U) = AU$, est toujours continue en $x = 0$ pour tout $t > 0$ et donnez l'expression de $F(U(t, 0^{\pm}))$ en fonction de U_g, U_d et des matrices A^- et A^+, correspondant aux parties positive, resp. négative, de la matrice A.