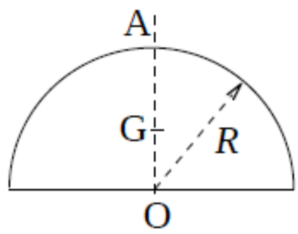
Examen de Mécanique 3A
IMACS

Jeudi 9 Janvier 2015

Durée : 2 heures – Document autorisé : une feuille de note recto-verso

Exercice 1. *(≈5 points)*



Soit un demi-disque de rayon R et de centre O homogène de masse m d'épaisseur négligeable (la masse du disque est donc surfacique). L'axe (O, z) est l'axe perpendiculaire au plan du demi-disque passant par O.

a) Calculer le moment d'inertie du demi-disque par rapport à l'axe (O,z).

b) Par symétrie le centre de gravité G du demi-disque est sur le segment [O,A].

Montrer que $OG = \dfrac{4R}{3\pi}$.

c) En déduire le moment d'inertie du demi-disque par rapport à l'axe (A,z). (A,z) est la droite parallèle à (O,z) passant par le point A défini sur la figure.

Exercice 2 : Mouvement d'un pendule oscillant avec translation (toutes les questions sont indépendantes) *(≈15 points)*

On considère un pendule de masse m_2 ponctuelle montée sur une tige indéformable de longueur f et de masse négligeable (cas du pendule simple). Ce pendule est fixé, par l'intermédiaire d'une liaison rotoïde parfaite (sans frottement), sur un solide de masse m_1 libre de se déplacer sans aucun frottement sur le plan horizontal Ox (cf. figure 2 ci-aprés). On suppose de plus que le pendule peut effectuer un mouvement de rotation dans le plan de la figure autour du centre d'inertie G de la masse m_1 . Les différentes coordonnées angulaire θ et en translation (x_1 , x_2) repérant les mouvements des divers solides sont indiquées sur la figure 2.

1- a) Évaluer l'énergie cinétique totale du système Ec ainsi que son énergie potentielle Ep. Écrire les équations de Lagrange linéarisées pour les deux coordonnées généralisées θ et x_1.
L'équation de Lagrange pour la variable x_1 permet d'exprimer une relation simple entre l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ et celle de translation $\ddot{x}_1$. Éliminer le terme en $\ddot{x}_1$ dans l'équation de Lagrange en θ, et aboutir à l'équation différentielle $m_1 l\ddot{\theta} + (m_1 + m_2)g\theta = 0$, où g représente l'attraction de la pesanteur (g = 9,81 m/s^2). En déduire la pulsation de résonance m_1 du système dans le cas des petites oscillations.

b) Adopter une approche Newtonienne (PFD) et retrouver l'équation du mouvement précédente.

2 - En intégrant deux fois par rapport au temps l'équation de Lagrange en x_1 (ce qui fera apparaître deux constantes d'intégration notées (C_1 et C_2) et en notant $\theta(t) = A \sin(\omega_1 t + \delta)$, déterminer les quatre constantes (C_1, C_2, A et δ), à partir des quatre conditions initiales suivantes : $x_1(t=0)=x_0$; $\dot{x}_1(t=0)=\dot{x}_0$; $\theta(t=0)=\theta_0$; $\dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0$ Écrire l'expression finale de $\theta(t)$ et de $x_1(t)$.

3 - Les équations linéarisées du mouvement de la question 1 s'écrivent sous la forme :

$$m_2 l\ddot{\theta} + (m_1+m_2)\ddot{x}_1 = 0, \qquad (1)$$

$$m_2 l\ddot{\theta} + m_2 g l\theta + m_2 l\ddot{x}_1 = 0. \qquad (2)$$

En déduire l'équation aux pulsations pour les petites oscillations du système. Retrouver ainsi la pulsation ω_1 de la question 1. Que vaut l'autre pulsation ? Que signifie ce résultat en terme de mouvement (mode cinématique ou mode de corps solide)? Discuter ce résultat en proposant une explication "mécanique".

4 - Le résultat obtenu à la question 3 tend à indiquer que le système ne possède en réalité (et contrairement à la modélisation proposée à la question 1) qu'un seul degré de liberté. Ceci se justifie d'ailleurs par la relation entre x_1 et $\ddot{\theta}$ (cf. équation (1), question 3). Calculer la composante horizontale Px (le long de Ox) de la quantité de mouvement et retrouver pour son expression linéarisée l'équation (1). On pourra aussi retrouver ce résultat en exprimant $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0$, avec la fonction de Lagrange. Déduire de tous ces résultats que le centre d'inertie du système articulé reste immobile au cours des petites oscillations (pour le mouvement propre s'effectuant à la pulsation ω_1 tout du moins). Caractériser l'état vibratoire (en phase, ou en opposition de phase) pour les deux mouvements propres (à $\omega = \omega_1$ et pour $\omega = 0$). Justifier ces résultats de manière précise.

5 - Le pendule simple de masse m_2 et de longueur l est remplacé par un pendule pesant constitué d'une tige cylindrique de même longueur l et de même masse m_2 . On suppose que le rayon de la tige est de dimension parfaitement négligeable par rapport à sa longueur. Le moment d'inertie de la tige (par rapport à G) sera pris égal à $m_2 l^2/12$. En quoi seront modifiées les équations du mouvement? Établir la nouvelle équation différentielle en θ de la question 1 (Approche Newtonienne ou Lagrangienne au choix).

6 - On revient au cas du pendule simple de la question 1. Le système est modifié par l'addition de ressorts latéraux (cf. figure 3 ci-dessous) de masse négligeable et de coefficient de raideur k.
Établir les nouvelles équations du mouvement linéarisées.

7 - Les équations de la question 6 se mettent sous la forme suivante :

$$\ddot{x}_1 + \alpha l\ddot{\theta} + \omega_{01}^2 x_1 = 0, \qquad (3)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}_1}{\ell} + \omega_{01}^2\theta = 0. \qquad (4)$$

Commenter sur le couplage inertiel (ou gyroscopique) du système. Déterminer les modes propres du système. Calculer notamment les pulsations propres. Montrer que dans le cas limite où $m_1 >> m_2$ on obtient un découplage complet de ces deux modes propres, pour lesquels les pulsations propres sont celles du pendule simple d'une part, et d'un oscillateur harmonique de raideur $2k$ d'autre part. Commenter ce résultat d'un point de vue physique.

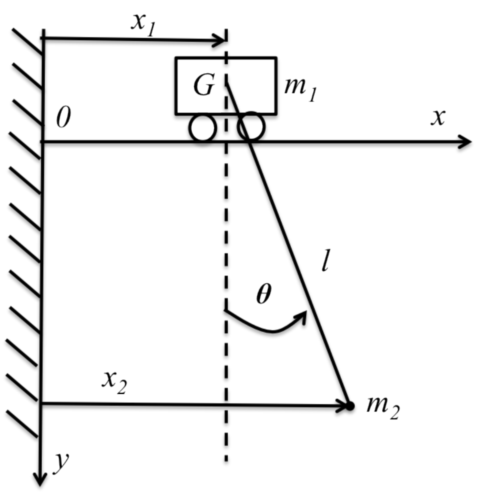


Figure 2

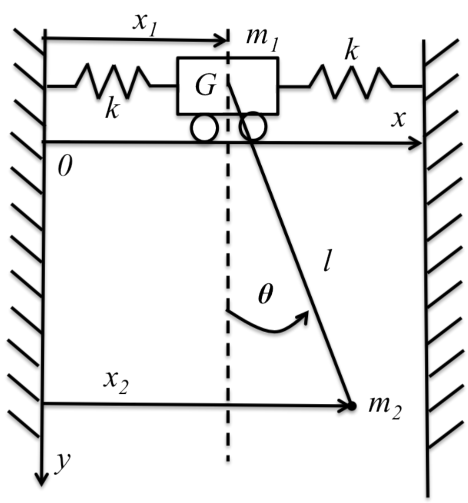


Figure 3