2. Transformation de Fourier

1. Introduction

Au chapitre 1, nous avons développé les fonctions périodiques en séries de sinus et de cosinus, ou d'exponentielles complexes, appelées séries de Fourier. Physiquement, dans le cas d'une onde sonore, on peut se représenter les termes d'une série de Fourier comme un ensemble d'harmoniques dont les fréquences forment un ensemble infini mais discret $\{n\nu\}$, $n = 1, 2, 3\ldots$ ($\nu = \omega/2\pi$ est la fréquence du fondamental). En électricité, une tension périodique peut être représentée par une série de Fourier. Celle-ci est une superposition d'un ensemble infini discret de tensions alternatives de fréquences $n\nu$. De même, en optique, une lumière constituée d'un ensemble discret de longueurs d'onde $\{\lambda/n\}$, $n = 1, 2\ldots$, c'est-à-dire un ensemble discret de couleurs, peut être représentée par une série de Fourier.

Deux questions se posent alors : premièrement, est-il possible de représenter une fonction *non périodique* par quelque chose d'analogue à une série de Fourier? Ensuite, peut-on étendre ou modifier le concept de série de Fourier de manière à inclure le cas d'un spectre *continu*?

De même qu'à la limite continue, une somme est remplacée par une intégrale, la série de Fourier sera remplacée par une intégrale de Fourier. Celle-ci peut être utilisée pour représenter des fonctions non périodiques, par exemple un son qui n'est pas répété, une impulsion unique de tension, ou un flash de lumière. L'intégrale de Fourier fait intervenir un spectre continu de fréquences, par exemple un ensemble de sons musicaux ou de couleurs de lumière.

2. Transformée de Fourier d'une fonction d'une variable

2.1. Définition

Soit $f(x)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle x. On appelle *transformée de Fourier* de $f(x)$ la fonction complexe de la variable réelle k définie par :

$$\boxed{F(k) = \mathcal{F}\big[f(x)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx.} \tag{2.1}$$

L'intégrale (2.1) n'ayant pas nécessairement un sens, $F(k)$ n'existe pas toujours.

En physique, dans la plupart des exemples, la variable concernée est, soit une longueur, soit un temps. Usuellement, la notation x représente une longueur. Dans ce cas, la variable k a les dimensions de l'inverse d'une longueur. Elle est appelée le *vecteur d'onde*. Lorsque l'on considére une fonction $f(t)$ du temps, on utilise pour la transformée de Fourier de $f(t)$ la notation[1]

$$\mathcal{F}\big[f(t)\big] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt, \tag{2.2}$$

où la variable ω, qui a les dimensions de l'inverse d'un temps, est la fréquence angulaire.

Revenons aux notations de l'équation (2.1). Nous donnerons seulement une condition *suffisante* (mais non nécessaire) d'existence de la transformée de Fourier. Rappelons tout d'abord que, par définition, une fonction f appartient à l'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions *sommables* (c'est-à-dire intégrables) si son intégrale, au sens de la théorie des intégrales impropres de Riemann, est absolument convergente, c'est-à-dire si l'on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < +\infty. \tag{2.3}$$

On a le **théorème** : *Toute fonction $f(x)$ de $\mathcal{L}^1$ (c'est-à-dire intégrable) a une transformée de Fourier. On démontre que celle-ci est continue et bornée, et tend vers 0 lorsque $|k| \to \infty$.*

On peut cependant définir la transformée de Fourier dans d'autres cas.

2.2. Inversion de la transformation de Fourier

On démontre que, inversement, on peut en général obtenir $f(x)$ à partir de $F(k)$ par la transformation dite *de Fourier inverse* :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\,dk.} \tag{2.4}$$

[1] La convention adoptée ici relativement au signe précédant i dans l'exponentielle imaginaire n'est pas la même dans les deux cas. Ce choix est lié au fait qu'en physique, l'on est fréquemment amené à considérer la transformée de Fourier spatiale et temporelle d'une fonction $f(x,t)$ dépendant à la fois de l'espace et du temps. Cette transformée de Fourier spatiale et temporelle est généralement définie par l'intégrale double suivante :

$$\mathcal{F}[f(x,t)] = \int dx \int dt\, f(x,t)e^{i(\omega t - kx)}.$$

En ce qui concerne les fonctions d'une variable, nous utiliserons dans la suite la convention de l'équation (2.1).

L'intégrale (2.4) doit être considérée *en valeur principale*, c'est-à-dire définie comme la limite suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\, dk = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} F(k)e^{ikx}\, dk. \tag{2.5}$$

On prend comme notation pour la transformation de Fourier inverse :

$$f(x) = \overline{\mathcal{F}}\big[F(k)\big]. \tag{2.6}$$

La formule d'inversion (2.4) ne permet pas en fait de remonter à $f(x)$, mais à une fonction presque partout égale à $f(x)$. À ce sujet, nous mentionnerons seulement le **théorème** suivant : *Si $f(x)$ est une fonction intégrable présentant un nombre fini de discontinuités, la formule d'inversion conduit à $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ sont les limites à droite et à gauche de $f(x)$.* En particulier, si $f(x)$ est continue, la formule d'inversion redonne bien $f(x)$. Ici encore, les conditions énoncées sont des conditions suffisantes mais non nécessaires.

2.3. Remarque sur la définition de la transformée de Fourier

Les conventions utilisées pour définir la transformation de Fourier (et donc aussi son inverse), c'est-à-dire les conventions utilisées dans les équations (2.1) et (2.4), ne sont pas universelles. En feuilletant différents livres, vous trouverez plusieurs autres conventions. Chacune de ces conventions présente des avantages qui peuvent conduire à la préférer.

Une fois les formules de Fourier écrites, il est impératif de continuer à travailler de manière cohérente. Dans la suite de ce cours, nous travaillons avec les formules (2.1) et (2.4). Dans le cas d'un autre choix, certains facteurs numériques peuvent différer.

2.4. Exemples

En physique, la formule d'inversion (2.4) s'interprète comme une décomposition de $f(x)$ en une somme d'oscillations harmoniques. Si x est une longueur, $F(k)$ est l'amplitude correspondant au vecteur d'onde k. Si t est un temps, $F(\omega)$ est l'amplitude correspondant à la fréquence angulaire ω.

2.5. Transformation de Fourier sinus et cosinus

Toute fonction $f(x)$ peut être décomposée en une somme d'une fonction paire $p(x)$ et d'une fonction impaire $q(x)$:

$$f(x) = p(x) + q(x). \tag{2.7}$$

On a :

$$\begin{cases} p(x) = \dfrac{1}{2}\big[f(x) + f(-x)\big] \\ q(x) = \dfrac{1}{2}\big[f(x) - f(-x)\big]. \end{cases} \tag{2.8}$$

On obtient, en remplaçant $f(x)$ par son expression (2.7) dans l'équation (2.1), et en tenant compte du fait que $p(x)$ est paire et $q(x)$ impaire,

$$F(k) = 2\int_0^\infty p(x)\cos kx\,dx - 2i\int_0^\infty q(x)\sin kx\,dx, \tag{2.9}$$

soit :

$$\mathcal{F}\big[f(x)\big] = \mathcal{F}_{\cos}[p(x)] - i\mathcal{F}_{\sin}[q(x)]. \tag{2.10}$$

La notation $\mathcal{F}_{\cos}$ représente une *transformation de Fourier cosinus* définie par

$$\mathcal{F}_{\cos}\big[f(x)\big] = 2\int_0^\infty f(x)\cos kx\,dx, \tag{2.11}$$

et la notation $\mathcal{F}_{\sin}$ une *transformation de Fourier sinus* définie par :

$$\mathcal{F}_{\sin}\big[f(x)\big] = 2\int_0^\infty f(x)\sin kx\,dx. \tag{2.12}$$

Lorsque f est réelle, on peut ainsi calculer séparément la partie réelle et la partie imaginaire de sa transformée de Fourier. On remarque que, pour que la transformée de Fourier d'une fonction f réelle soit également réelle, il faut et il suffit que f soit paire.

3. Propriétés de la transformation de Fourier

3.1. Linéarité

L'intégration étant une opération linéaire, la transformation de Fourier l'est aussi, c'est-à-dire que, λ et μ étant des scalaires, on a :

$$\mathcal{F}\big[\lambda f(x) + \mu g(x)\big] = \lambda F(k) + \mu G(k). \tag{3.1}$$

En d'autres termes, la transformation de Fourier commute avec l'addition et la multiplication par un scalaire.

3.2. Translation

Cherchons la transformée de Fourier de $f(x-a)$ (a réel). En posant $u = x-a$, on obtient

$$\mathcal{F}\big[f(x-a)\big] = \int_{-\infty}^\infty f(x-a)e^{-ikx}\,dx = e^{-ika}\int_{-\infty}^\infty f(u)e^{-iku}\,du, \tag{3.2}$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{F}\big[f(x-a)\big] = e^{-ika}F(k).} \tag{3.3}$$

À la translation de $f(x)$ correspond un déphasage de $F(k)$ proportionnel à k (la transformée de Fourier de $f(x-a)$ s'obtient en multipliant $F(k)$ par le facteur de phase e^{-ika}).

3.3. Modulation

Inversement, la transformée de Fourier de $e^{ik_0x}f(x)$ (k_0 réel) est donnée par

$$\mathcal{F}\big[e^{ik_0x}f(x)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k-k_0)x}\,dx, \tag{3.4}$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{F}\big[e^{ik_0x}f(x)\big] = F(k-k_0).} \tag{3.5}$$

À la modulation de $f(x)$ correspond une translation de $F(k)$.

3.4. Changement d'échelle

Changer l'unité pour la variable x revient à multiplier celle-ci par une constante réelle $a \neq 0$. En posant $u = ax$, on obtient

$$\mathcal{F}\big[f(ax)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iku/a}\,du, \tag{3.6}$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{F}\big[f(ax)\big] = \frac{1}{|a|}F\Big(\frac{k}{a}\Big).} \tag{3.7}$$

Une *compression* de l'échelle des x entraîne une *dilatation* de l'échelle des k.

En termes plus physiques, une compression de l'échelle des longueurs entraîne une dilatation de l'échelle des vecteurs d'onde. De même, une compression de l'échelle des temps entraîne une dilatation de l'échelle des fréquences angulaires. C'est là une propriété extrêmement importante en pratique de la transformation de Fourier.

3.5. Conjugaison complexe

On a

$$\mathcal{F}\big[f^*(x)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)e^{-ikx}\,dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\,dx\right]^*, \tag{3.8}$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{F}\big[f^*(x)\big] = F^*(-k).} \tag{3.9}$$

3.6. Transformée de Fourier de $f'(x)$

Supposons $f(x)$ intégrable, dérivable et à dérivée intégrable. Sa dérivée f' possède alors une transformée de Fourier, donnée par :

$$\mathcal{F}\big[f'(x)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ikx}\,dx. \tag{3.10}$$

Intégrons par parties l'intégrale au second membre de l'équation (3.10) :

$$\mathcal{F}\big[f'(x)\big] = f(x)e^{-ikx}\big|_{-\infty}^{\infty} + ik\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx. \tag{3.11}$$

Comme f' est intégrable, $f(x)$ a bien une limite finie pour $x \to \pm\infty$. Cette limite ne peut être différente de 0, sans quoi f ne serait pas intégrable. Le terme tout intégré de la formule (3.11) est donc nul. Il reste :

$$\boxed{\mathcal{F}\big[f'(x)\big] = ik\mathcal{F}\big[f(x)\big] = ikF(k).} \tag{3.12}$$

À la dérivation de $f(x)$ par rapport à x correspond donc la multiplication de $F(k)$ par ik. Plus généralement, pour la dérivée d'ordre m, on a :

$$\boxed{\mathcal{F}\big[f^{(m)}(x)\big] = (ik)^m F(k).} \tag{3.13}$$

Le résultat (3.13) conduit à une majoration importante. De la formule

$$(ik)^m F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x)e^{-ikx}\,dx, \tag{3.14}$$

on déduit l'inégalité :

$$|k|^m |F(k)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)|\,dx. \tag{3.15}$$

Plus $f(x)$ est dérivable, à dérivées intégrables, plus sa transformée de Fourier $F(k)$ décroît rapidement à l'infini.

3.7. Dérivation de $F(k)$ par rapport à k

On a

$$\frac{d}{dk}F(k) = \frac{d}{dk}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx, \tag{3.16}$$

soit, en dérivant sous le signe somme :

$$\frac{d}{dk}F(k) = -i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-ikx}\,dx = \mathcal{F}\big[-ixf(x)\big]. \tag{3.17}$$

(La dérivation sous le signe somme est légitime si $xf(x)$ est intégrable). Plus généralement, on a :

$$\boxed{\mathcal{F}\big[(-ix)^m f(x)\big] = F^{(m)}(k).} \tag{3.18}$$

Ce résultat conduit encore à une majoration :

$$|F^{(m)}(k)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^m |f(x)|\,dx. \tag{3.19}$$

Plus $f(x)$ décroît rapidement à l'infini, plus $F(k)$ est dérivable (avec des dérivées bornées).

4. Exemples

Sur les trois exemples ci-dessous, on peut vérifier les propriétés de la transformation de Fourier citées au paragraphe 3.

4.1. Transformée de Fourier de la gaussienne

On peut montrer (soit en résolvant une équation différentielle, soit en utilisant l'analyse complexe) que la fonction gaussienne

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}, \tag{4.1}$$

a pour transformée de Fourier une gaussienne :

$$F(k) = e^{-k^2\sigma^2/2}. \tag{4.2}$$

4.2. Transformée de Fourier de la lorentzienne

On peut montrer (nous le ferons ultérieurement comme application de l'analyse complexe) que la fonction lorentzienne

$$f(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2}, \qquad a > 0, \tag{4.3}$$

a pour transformée de Fourier la fonction “en toile de tente” (non dérivable en $k = 0$) :

$$F(k) = e^{-a|k|}. \tag{4.4}$$

4.3. Transformée de Fourier de la fonction porte

La fonction porte est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \tag{4.5}$$

Elle a pour transformée de Fourier la fonction :

$$F(k) = 2\frac{\sin ak}{k}. \tag{4.6}$$

5. Convolution et transformation de Fourier

On définit le *produit de convolution* de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ appartenant à $\mathcal{L}^1$ par la formule :

$$[f * g](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du. \tag{5.1}$$

On peut montrer que $f * g = g * f$ appartient aussi à $\mathcal{L}^1$ (nous l'admettrons). On peut alors calculer la transformée de Fourier de cette fonction :

$$\mathcal{F}\big[f * g\big] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(u)g(x-u)\,dxdu. \tag{5.2}$$

Effectuons le changement de variables $x - u = v,\ dx = dv$ dans l'intégrale (5.2). On obtient :

$$\mathcal{F}\big[f * g\big] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(u+v)} f(u)\,g(v)\,dudv. \tag{5.3}$$

L'intégrale double (5.3) est le produit (ordinaire) de deux intégrales simples :

$$\mathcal{F}[f * g] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iku} f(u)\,du \int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{-ikv}\,dv. \tag{5.4}$$

On obtient ainsi la relation :

$$\boxed{\mathcal{F}\big[f * g\big] = \mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g].} \tag{5.5}$$

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au produit ordinaire des transformées de Fourier de ces deux fonctions.

À cause de la symétrie des intégrales de Fourier et de Fourier inverse représentant respectivement $f(x)$ et $F(k)$, il existe un résultat analogue reliant le produit (ordinaire)$f(x)g(x)$ et le produit de convolution de $F(k)$ et de $G(k)$:

$$\boxed{\overline{\mathcal{F}}[F * G] = 2\pi\overline{\mathcal{F}}[F]\ \overline{\mathcal{F}}[G].} \tag{5.6}$$

6. Théorème de Parseval

6.1. Le théorème de Parseval

Pour les séries de Fourier nous avons vu au chapitre 1 l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{6.1}$$

En termes physiques, cette égalité correspond au fait que l'énergie totale d'un phénomène périodique est égale à la somme des énergies associées aux différents harmoniques.

Une intégrale de Fourier correspond à un spectre continu de fréquences, et une relation analogue à l'égalité de Parseval existe pour les transformées de Fourier. Elle est connue sous le nom de *théorème de Parseval* ou de *formule de Parseval-Plancherel*. On a l'égalité

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 \, dk,} \tag{6.2}$$

à la condition que les intégrales existent[2]. Plus généralement, on a, à la condition que les intégrales existent :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k) G^*(k) \, dk.} \tag{6.3}$$

Démontrons la formule (6.3). On a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G^*(k) e^{-ikx} \, dk dx, \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G^*(k) e^{-ikx} \, dk dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G^*(k) \, dk \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k) G^*(k) \, dk.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Ceci démontre l'égalité (6.3) (appelée parfois *second théorème de Parseval*). La formule (6.2) (*premier théorème de Parseval*) s'en déduit comme un cas particulier.

[2] Voir la discussion du paragraphe 8.

6.2. Un peu de physique

En physique, si $f(t)$ représente une onde ou une vibration quelconque (la variable est alors le temps t), et si $F(\omega)$ est sa transformée de Fourier, la formule (6.2) se réécrit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega. \tag{6.5}$$

Les deux intégrales ci-dessus représentent l'énergie totale de la vibration. La puissance instantanée dissipée est : en mécanique $f(t)v(t)$ (force $\times$ vitesse), en électricité $V(t)I(t)$ (tension $\times$ courant). L'intégrale temporelle représente donc l'énergie totale. L'intégrale au second membre de l'équation (6.5) correspond à une décomposition en vibrations harmoniques. Elle exprime le fait que l'énergie totale est la somme des énergies de chacune des composantes. Cette relation a été utilisée pour la première fois par un physicien (Lord Rayleigh, 1889).

7. Transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables

On considère un point $\boldsymbol{r} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'espace à n dimensions $\mathcal{R}^n$ et un point $\boldsymbol{k} = k_1, k_2, \ldots, k_n$ de $\mathcal{R}^n$. On considère une fonction $f(\boldsymbol{r})$ appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathcal{R}^n)$, c'est-à-dire telle que :

$$\int_{\mathcal{R}^n} |f(\boldsymbol{r})| \, \boldsymbol{dr} < +\infty. \tag{7.1}$$

Sa transformée de Fourier est une fonction $F(\boldsymbol{k})$ définie par

$$\boxed{F(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathcal{R}^n} f(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}} \, d\boldsymbol{r}.} \tag{7.2}$$

De façon générale, les propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables sont du même type que celles qui correspondent au cas d'une seule variable. Citons ci-dessous quelques cas particuliers intéressants.

• Dans le cas particulier où la fonction $f(\boldsymbol{r})$ se factorise,

$$f(\boldsymbol{r}) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n), \tag{7.3}$$

sa transformée de Fourier se factorise également :

$$F(\boldsymbol{k}) = \mathcal{F}[f_1 f_2 \ldots f_n] = F_1(k_1) F_2(k_2) \ldots F_n(k_n). \tag{7.4}$$

• Il existe un autre cas simple, c'est celui où la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est fonction seulement de $r = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. La fonction $f(r)$ est alors invariante par rotation. On dit que c'est une fonction *radiale*. Nous allons étudier ce cas en détail lorsque le nombre de dimensions de l'espace est égal à 2 ou à 3.

7.1. Transformée de Fourier d'une fonction radiale à deux dimensions

On a :

$$F(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathcal{R}^2} f(r) e^{-i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r}. \tag{7.5}$$

En utilisant dans le plan des coordonnées polaires r et θ définies en prenant comme axe polaire la direction du vecteur $\boldsymbol{k}$, on a :

$$F(\boldsymbol{k}) = \int_0^\infty dr\, r f(r) \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-ikr\cos\theta}. \qquad (7.6).$$

La fonction $F(\boldsymbol{k})$ ne dépend en réalité que du module k de $\boldsymbol{k}$. C'est donc aussi une fonction radiale. En utilisant la représentation intégrale de la fonction de Bessel d'ordre zéro[3] $J_0(x)$, on obtient le résultat suivant :

$$F(k) = 2\pi \int_0^\infty r J_0(kr) f(r)\, dr. \tag{7.7}$$

7.2. Transformée de Fourier d'une fonction radiale à trois dimensions

On a :

$$F(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathcal{R}^3} f(r) e^{-i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r}. \tag{7.8}$$

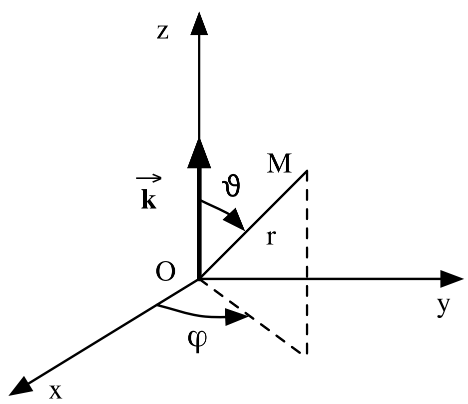

Figure 1

[3] Il s'agit de la représentation intégrale :

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix\cos\theta}\, d\theta.$$

En utilisant dans l'espace des coordonnées polaires définies en prenant l'axe Oz selon la direction du vecteur $\boldsymbol{k}$ (Figure 1), on a :

$$F(\boldsymbol{k}) = \int_0^\infty dr\, r^2 f(r) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi e^{-ikr\cos\theta} \sin\theta\, d\theta. \tag{7.9}$$

Ici encore, la fonction $F(\boldsymbol{k})$ ne dépend en réalité que du module k de $\boldsymbol{k}$. On a le résultat :

$$F(k) = 4\pi \int_0^\infty r^2 \frac{\sin kr}{kr} f(r)\, dr. \tag{7.10}$$

Ce résultat est important en pratique, par exemple dans la théorie de la diffusion par un potentiel central.

8. Transformée de Fourier des fonctions de carré sommable

8.1. Conservation de la norme

Nous avons jusqu'ici donné la définition de la transformée de Fourier des fonctions appartenant à l'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables, tout en indiquant qu'on peut aussi définir la transformée de Fourier dans d'autres cas. Un cas pratique important en physique, notamment en mécanique quantique et en optique, est celui des fonctions appartenant à l'espace $\mathcal{L}^2$ des fonctions *de carré sommable* (c'est-à-dire de carré intégrable), telles que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < +\infty. \tag{8.1}$$

Entre les fonctions $f(x)$ et $F(k)$, on a l'égalité de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2\, dk, \tag{8.2}$$

qui exprime que, dans l'espace $\mathcal{L}^2$ des fonctions de carré sommable, la transformation de Fourier conserve la norme.

Les fonctions de carré sommable jouent un grand rôle en physique. En mécanique quantique le carré $|\psi(x)|^2$ des fonctions d'onde $\psi(x)$ représente une densité de probabilité. La relation

$$\int |\psi(x)|^2\, dx = 1, \tag{8.3}$$

montre que toute fonction d'onde appartient à $\mathcal{L}^2$.

8.2. Relation d'incertitude

Considérons pour fixer les idées une fonction du temps. Plus cette fonction varie rapidement, plus sa transformée de Fourier s'étend vers les fréquences angulaires élevées. Il s'ensuit que, plus un signal est bref, plus sa transformée de Fourier décroît lentement à l'infini. À la limite, une impulsion de Dirac[4] a une transformée de Fourier non décroissante à l'infini. Inversement, plus la transformée de Fourier décroît rapidement, plus le signal décroît lentement. Cela peut s'exprimer quantitativement de différentes manières suivant la façon dont on exprime l'étendue d'un signal.

Pour les fonctions de carré sommable, donc en particulier pour les fonctions d'onde $\psi(x)$ en mécanique quantique (on revient ici à la variable x), il est d'usage courant de considérer l'écart quadratique moyen Δx défini par

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \tag{8.4}$$

où la moyenne de x et la moyenne de x^2 sont définies respectivement par :

$$\langle x \rangle = \frac{\int x|\psi(x)|^2\,dx}{\int |\psi(x)|^2\,dx}, \qquad \langle x^2 \rangle = \frac{\int x^2|\psi(x)|^2\,dx}{\int |\psi(x)|^2\,dx}. \tag{8.5}$$

Si $\Psi(k)$ désigne la transformée de Fourier de $\psi(x)$, on considère aussi l'écart quadratique moyen Δk défini par

$$(\Delta k)^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2, \tag{8.6}$$

où la moyenne de k et la moyenne de k^2 sont définies respectivement par :

$$\langle k \rangle = \frac{\int k|\Psi(k)|^2\,dk}{\int |\Psi(k)|^2\,dk}, \qquad \langle k^2 \rangle = \frac{\int k^2|\Psi(k)|^2\,dk}{\int |\Psi(k)|^2\,dk}. \tag{8.7}$$

On peut montrer que les écarts quadratiques moyens Δx et Δk vérifient l'inégalité suivante :

$$\boxed{\Delta x\,\Delta k \geq \tfrac{1}{2}.} \tag{8.8}$$

La relation (8.8) est connue en mécanique quantique sous le nom de *relation d'incertitude de Heisenberg*.

[4] La "fonction" de Dirac est introduite au chapitre 3.