TD2 Conditions aux limites pour les edp et les systèmes d'edp hyperboliques

Exercice n°1 Soit l'edp :

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad t \in [0, T] \, , \, x \in [0, 1]$$

associée à la condition initiale : (2) $u(0, x) = u_0(x), x \in [0,1]$

et à la condition aux limites : (3) $u(t, 0) = u_1(t)$, $t \in [0, T]$.

Dans les questions qui suivent on suppose que a est une constante > 0, sauf mention explicite du contraire.

1) On note Δ_α l'ensemble défini par :

$$\Delta_\alpha = \{ (t,x) \in [0, T] \times [0, 1] \; / \; x = a \cdot t + \alpha \}$$

On note $\tilde{u}_\alpha$ la restriction de la solution u de (1)-(2)-(3) à l'ensemble Δ_α. Par définition :

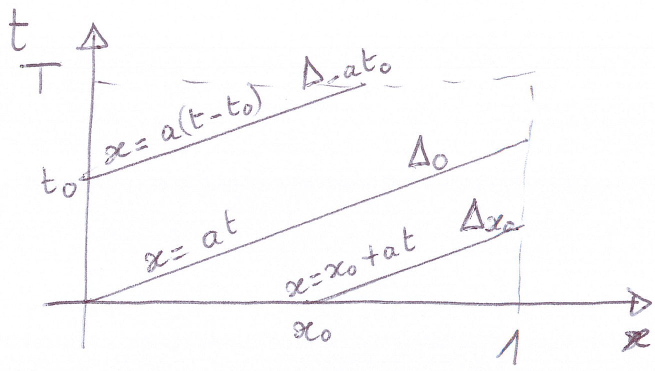
$$\tilde{u}_\alpha(t) = u(t, x_\alpha(t)) \quad \text{avec} \quad x_\alpha(t) \overset{def}{=} a t + \alpha$$

$\tilde{u}_\alpha$ est définie sur $[0, T]$. Si u est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T] \times [0, 1]$, $\tilde{u}_\alpha$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T]$.

Montrez que la fonction $\tilde{u}_\alpha$ est constante.

2) En déduire que

$$\begin{cases} u(t,x) = u_0(x-at) & \text{si } x > at \\ u(t,x) = u_1\left(t - \dfrac{x}{a}\right) & \text{si } x < at \end{cases}$$



$\alpha \in [-aT, 1]$

3) Que dire du problème (1)-(2)-(3) si $a < 0$

4) A quelle condition la solution est elle continue sur $[0,T] \times [0,1]$? A quelle condition supplémentaire est elle $\mathcal{C}^1$?

5) Expliquez qualitativement ce qui change si a est une $f^n > 0$ de x au lieu d'être une constante.

<u>Exercice n°2</u> Soit le système d'edp :

$$(S) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + a \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}, \quad t \in [0,T],\ x \in [0,1]$$

a une cste > 0

avec pour condition initiale : $(i) \begin{cases} u(0,x) = u_0(x) \\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases}$

et pour condition aux limites :

$$(ii) \begin{cases} u(t,0) = u_g(t) \\ v(t,1) = v_d(t) \end{cases}$$

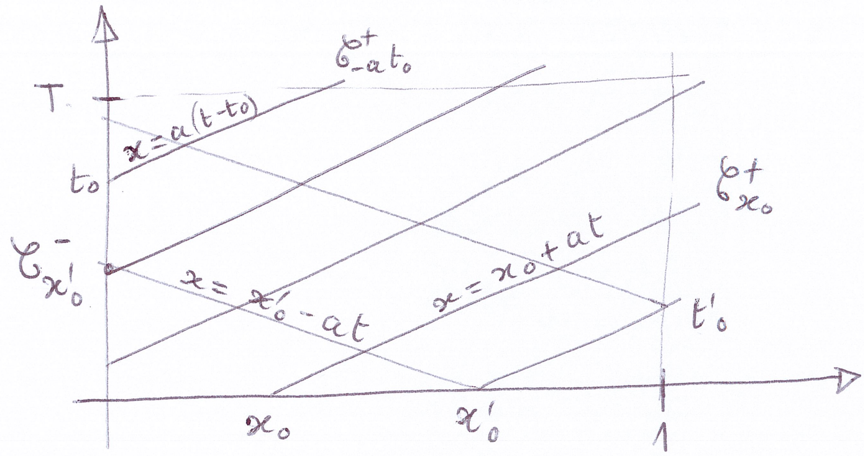
1) On pose $w = u + v$ et $z = u - v$.

Quel est le système vérifié par w et z ?

Quelle est l'expression de (u, v) en f^n de (w, z).

En déduire les conditions aux limites et initiale vérifiée par w et z.

2) On note $\begin{cases} \mathcal{C}^+_\alpha & \text{la droite d'équation : } x = at + \alpha \\ \mathcal{C}^-_\alpha & \text{la droite d'équation : } x = -at + \alpha \end{cases}$



En vous servant du résultat de l'exercice 1, que peut on dire du comportement de la restriction de w aux droites $\mathcal{C}^+_\alpha$ et de la restriction de z aux droites $\mathcal{C}^-_\alpha$?

En déduire une méthode (appelée méthode des caractéristiques) pour calculer la solution exacte de (S)-(i)-(ii).

3) D'après la méthode de construction de la solution déduite de la question (2), pourrait on remplacer les CL (ii) par :

$$(ii') \quad \begin{cases} u(t,0) = u_g(t) \\ v(t,0) = v_g(t) \end{cases} \quad ?$$

4) Peut on imposer la valeur de w en $x = 1$?
Même chose pour la valeur de z en $x = 0$?