

Examen de systèmes mécaniques 2018-2019

28

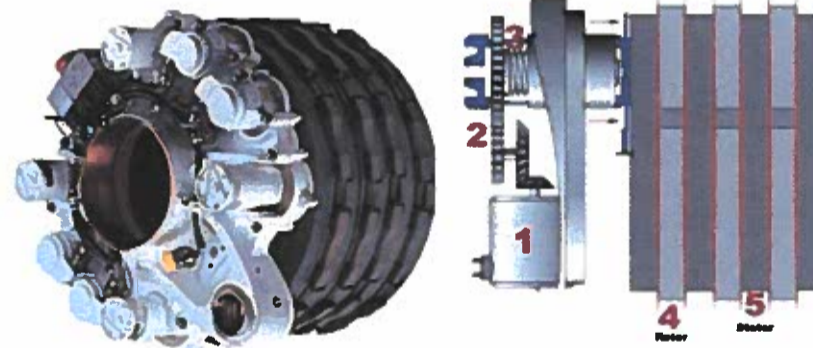
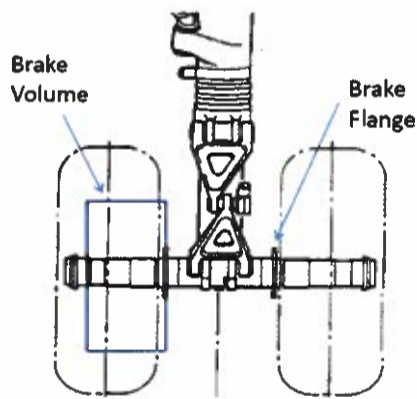
Le temps alloué est de 2 heures. Toute note ou support de cours est interdite.

L'examen prend principalement la forme de problèmes ou questions successives. Vous êtes invité à noter sur le document réponse des éléments de justification à vos réponses.

Le système de freinage d'un avion, représenté Figure 1, est constitué des freins à disques au niveau du train d'atterrissage, des inverseurs de poussée, des aérofreins. Nous nous focaliserons ici sur le sous-système freins à disques. Les roues des trains d'atterrissage principaux (train arrière) sont équipées de freins multi-disques, comportant des surfaces de friction pour chaque empilement de disques. Les disques du rotor sont liés à la roue et les disques du stator sont liés au train d'atterrissage. Les disques sont mis en contact à l'aide d'un actionneur. La Figure 2 représente une solution électrique de ce type d'actionneur.



Figure 1 : Systèmes participants au freinage d'un avion



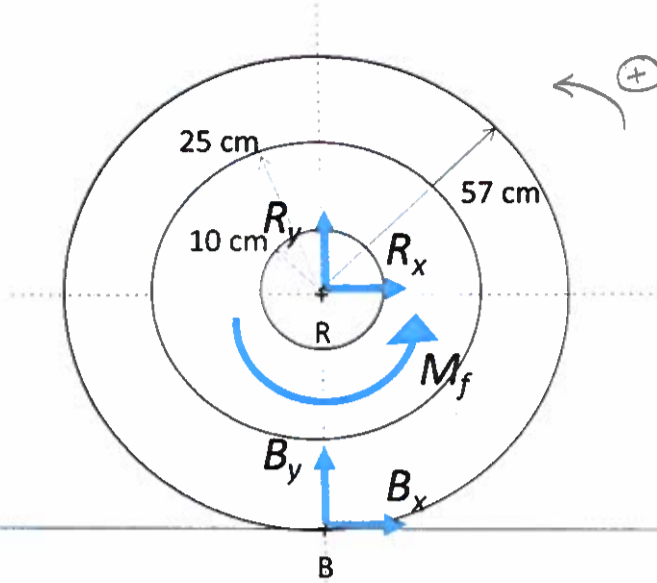
Composants :

1. moteur électrique
2. réducteur
3. système vis-écrou
4. disques « rotor » lié à la jante et au pneu
5. disques « stator » liés à l'essieu et au train

Figure 2 : Système de freinage électrique

I. Statique

1. On isole une roue du train principal arrière, les actions extérieures sont représentées Figure 3 :
- Les efforts du sol sur la roue au point B ont pour valeurs $B_x = 50 \text{ kN}$ et $B_y = 140 \text{ kN}$;
 - L'action des freins à disque agit sur la zone grisée (entre les rayons 10 et 25 cm) et est représentée par un moment équivalent M_f à déterminer ;
 - Le palier de la roue est parfait sans couple de frottement, son action sur la roue est représentée au point R par les composantes R_x et R_y .



$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext} &= \vec{0} \\ \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{B}_y + \vec{B}_x &= \vec{0} \\ \begin{cases} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{cases} & \begin{cases} R_x + B_x = 0 \\ R_y + B_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = -B_x = -50 \text{ kN} \\ B_y = -B_y = -140 \text{ kN} \end{cases} \\ \sum \vec{M}_{F_{ext}, R} &= \vec{0} \\ m_f^0 + B_x \times 0,57 &= 0 \Rightarrow M_f = -0,57 B_x \\ &= -0,57 \times 50 \\ &= -28,5 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Figure 3 : Actions sur une roue d'un train principal

L'application du principe fondamental de la statique permet de déterminer les actions R_x , R_y et M_f .
Cochez les solutions exactes :

- 1pt
- Pour R_x
 - 50 kN
 - 140 kN
 - 50 kN
 - 140 kN
 - 0 kN
 - Pour R_y
 - 50 kN
 - 140 kN
 - 50 kN
 - 140 kN
 - 0 kN
 - Pour M_f
 - 79.8 kN.m
 - 28.5 kN.m
 - 7.5 kN.m
 - 5 kN.m
 - 0 kN.m

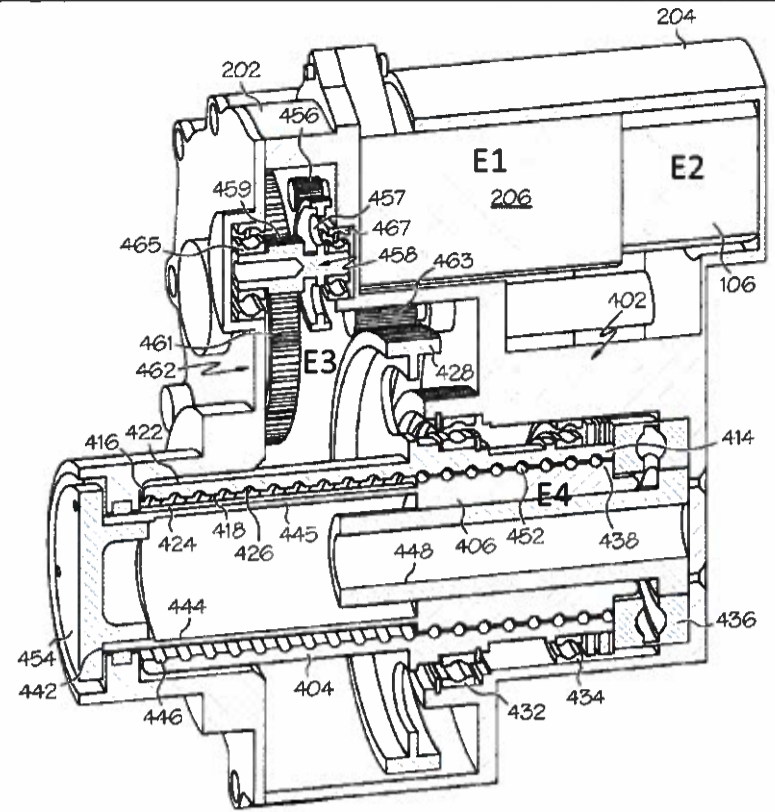
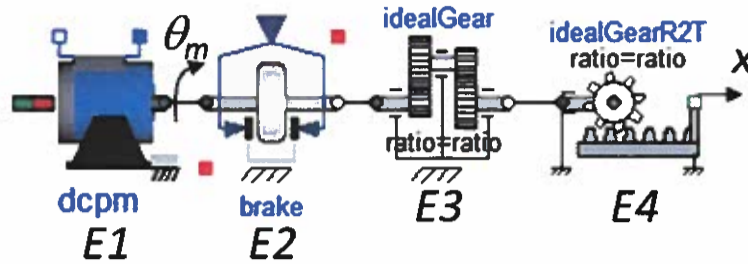
2. Le moment de freinage M_f est obtenu par frottement sec (de coefficient $\mu=0,4$ constant et non dépendant de la vitesse) au niveau des $N_s=8$ surfaces d'interface entre les disques du rotor et du stator. L'effort normal de pilotage de ce moment de frottement est obtenu à l'aide de $N_v=4$ vérins électromécaniques. Cochez l'expression liant le moment M_f , l'effort normal F_n provenant d'un vérin, le coefficient de frottement μ , le nombre de contacts et de vérins, le rayon intérieur R_i (100 mm) et le rayon extérieur R_e (250 mm) des disques. On suppose que les efforts des vérins génèrent une pression normale uniformément répartie sur les disques. Cochez la bonne relation.

- 1pt
- $M_f = \mu N_s N_v F_n \frac{2 R_e^3 - R_i^3}{3 R_e^2 - R_i^2}$
 - $M_f = \mu N_s N_v F_n \frac{R_e + R_i}{2}$
 - $M_f = \mu N_s N_v F_n \frac{R_e - R_i}{2}$
 - $M_f = \mu N_s N_v F_n \frac{1}{4} \frac{R_e^4 - R_i^4}{R_e^2 - R_i^2}$

$$\begin{aligned} m_f^0 &= \int_s F_p r ds = \int_s F_p r r dr d\theta \quad \text{avec } F = \mu N_s N_v \\ &= \mu N_s N_v \int_s r^2 dr d\theta \\ &= \mu N_s N_v \left[\frac{r^3}{3} \right]_{R_i}^{R_e} \left[\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \mu N_s N_v \frac{1}{3} (R_e^3 - R_i^3) \times 2\pi \\ \text{or } p &= \frac{F_n}{\pi (R_e^2 - R_i^2)} \Rightarrow m_f^0 = \mu N_s N_v F_n \frac{2}{3} \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} \end{aligned}$$

II. Travaux virtuels et énergies potentielles

- Chaque vérin électromécanique est constitué :
- E1 : D'un petit moteur électrique à aimants permanents.
 - E2 : D'un frein à manque de courant qui bloque le vérin lorsqu'il n'est pas alimenté (mode parking).
 - E3 : D'un réducteur de rapport de réduction N ratio entre la vitesse de l'axe rapide, axe du moteur, et de l'axe lent, écrou de la vis. Ici $N = 64$.
 - E4 : D'une vis à billes dont le rapport de transmission est fonction du pas p exprimé en mm/tr. Pour chaque tour d'écrou, la vis se déplace de p mm. Ici $p = 3$ mm/tr.



On néglige les pertes et l'effet du frein à manque de courant.

1pt

1. On s'intéresse tout d'abord au lien cinématique liant la rotation élémentaire $d\theta_m$ (en rad) du moteur électrique et la translation dx (en m) en sortie du vérin. Cochez la bonne relation.

- $dx = d\theta_m \cdot \frac{N}{p}$
 $dx = d\theta_m \cdot N \cdot p$
 $dx = d\theta_m \cdot \frac{p}{N \cdot 6283}$
 $dx = d\theta_m \cdot \frac{p}{N}$
 $dx = d\theta_m \cdot \frac{N \cdot p}{1000}$

$$d\theta_m = N \cdot d\theta_v \Rightarrow d\theta_v = \frac{d\theta_m}{N}$$

$$dx = d\theta_v \cdot p = d\theta_m \cdot \frac{p}{N}$$

1pt

2. A l'aide du théorème des travaux virtuels, estimez le couple à fournir au niveau du moteur pour exercer un effort de translation an sortie de vérin de 48 kN. Cochez la bonne valeur.

- 2,25 N.m
 0,36 N.m
 1 N.m
 7,5 N.m
 12,4 N.m

$$F = C \cdot d\theta \Rightarrow F dx = C d\theta_m$$

$$(F \cdot dx = \delta W) \Rightarrow C = \frac{F dx}{d\theta_m} = F \cdot \frac{p}{N dx} = \frac{F \cdot p}{N} = 2,25 \text{ N.m}$$

III. Principe fondamental de la dynamique et bilan d'énergie

1. Calculez la distance d'arrêt d'un avion de 65000 kg présentant une vitesse initiale au sol de 65 m/s. L'effort de freinage équivalent à l'action des freins à disques est de 200 kN. On néglige l'effet des efforts aérodynamiques et l'action des inverseurs de poussée. Cochez la bonne valeur.

- 50 m
 98 m
 383 m
 686 m
 916 m

Conservat° de l'énergie : $E_m = E_c + E_p$

$$\delta E_p = \delta W \Rightarrow F \cdot dx = \frac{1}{2} m v^2$$

$$dx = \frac{1}{2F} \cdot m v^2 = 686 \text{ m}$$

1pt

2. Calculez l'échauffement des paquets de disques. Chacune des 4 roues comprend un paquet de disques de volume 16 l, de densité 2250 kg/m³ et de capacité thermique massique 1.35 kJ/kg/K. On néglige les transferts thermiques avec l'air ambiant (comportement adiabatique). Cochez la bonne valeur.

- 212 K
 487 K
 706 K
 1403 K
 2825 K

$$Q = \frac{E_c}{N_r \rho \cdot m} = \frac{E_c}{4 C_p \cdot \rho \cdot V} = 706 \text{ K}$$

↑
Nbre de roues

↑
à convertir en m^3

IV. Equations de Lagrange

On veut maintenant modéliser le paquet de disques. Nous supposons pour cela qu'il est équivalent à un cylindre creux et homogène. Nous supposons aussi que lors de la compression induite par l'effort F équivalent à l'ensemble des vérins électriques lors du freinage, le déplacement de chaque section est donné par la relation suivante :

$$U(x, t) = U_L(t) \cdot \frac{x}{L}$$

Où $U_L(t)$ exprime le déplacement de la section en contact avec les vérins. On remarquera que le déplacement de la section du paquet de disques en $x=0$ est nul.

1. Par intégration sur l'ensemble du volume donnez l'expression de l'énergie cinétique en fonction de la vitesse $dU_L(t)/dt$.

1pt

$$E_c = \iiint \frac{1}{2} \dot{u}(x, t)^2 \rho \, dV = \frac{1}{2} \dot{u}_L^2(t) \int_0^L \pi (r_e^2 - r_i^2) \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx$$

$dV = r \, dr \, d\theta \, dx$

$$= \frac{1}{2} \pi (r_e^2 - r_i^2) \frac{L}{3} \dot{u}_L^2$$

$\frac{1}{L^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L$

2. Par intégration sur l'ensemble du volume donnez l'expression de l'énergie de déformation élastique en fonction de $U_L(t)$.

1pt

$$E_e = \iiint \frac{1}{2} \sigma \epsilon \, dV \quad \text{avec } \sigma = E \cdot \epsilon$$

$$= E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_L(t)}{L}$$

$$E_e = \frac{1}{2} E \int_0^L \epsilon^2 \pi (r_e^2 - r_i^2) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} E \cdot \frac{\pi}{L} (r_e^2 - r_i^2) U_L^2(t)$$

K_{eq}

3. Donnez l'expression du Lagrangien du système « paquet de disques ».

1pt

$$\mathcal{L} = E_c - E_e = \frac{1}{2} M_{eq} \dot{u}_L^2(t) - \frac{1}{2} K_{eq} U_L^2(t)$$

4. Grace aux équations de Lagrange, donnez la masse équivalente M_{eq} et la raideur équivalente K_{eq} du paquet de disques.

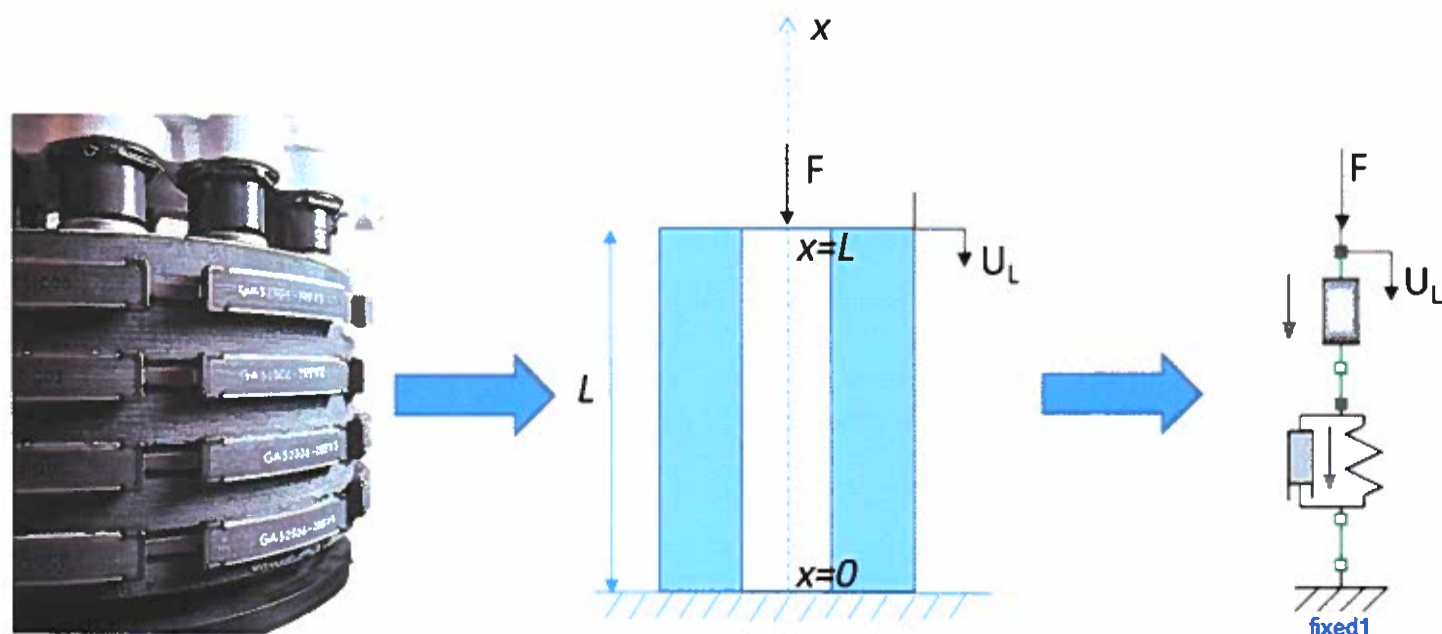
1pt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_L} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_L} = -F = M_{eq} \ddot{u}_L + K_{eq} U_L \quad \text{avec } M_{eq} = \pi (r_e^2 - r_i^2) \frac{L}{3}$$

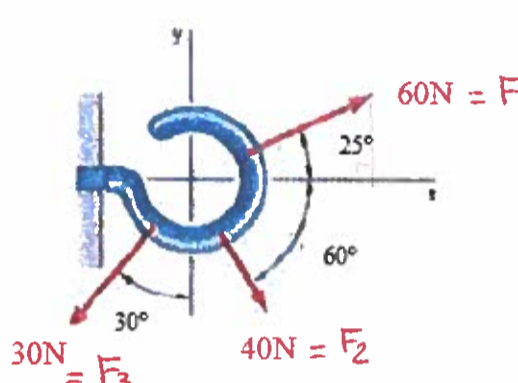
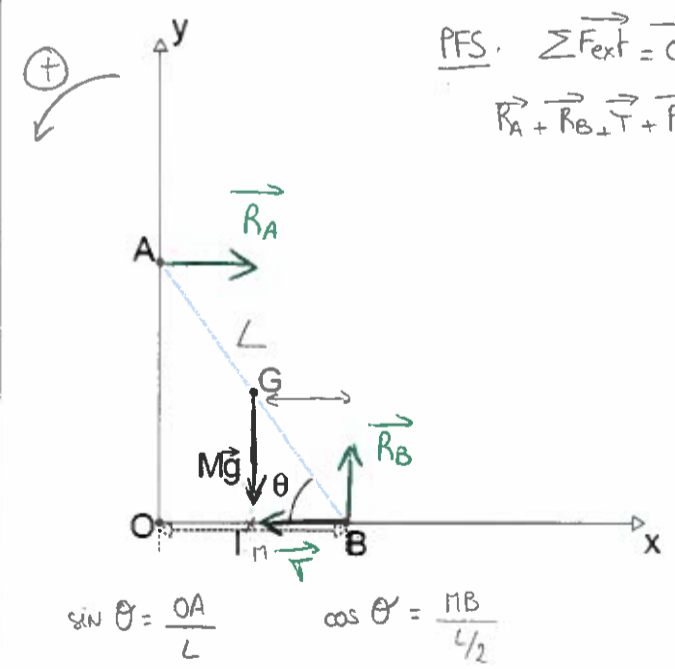
$$K_{eq} = \frac{E \pi}{L} (r_e^2 - r_i^2)$$

Données : Longueur $L = 300 \text{ mm}$, rayon interne $r_i = 100 \text{ mm}$, rayon externe $r_e = 250 \text{ mm}$, masse volumique $\rho = 2250 \text{ kg/m}^3$, module de Young $E = 40 \text{ GPa}$.

Rappel : lien entre déformations et contraintes dans un milieu élastique $\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$



$$J \Leftrightarrow \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

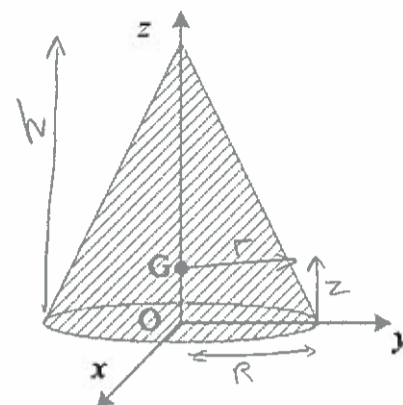
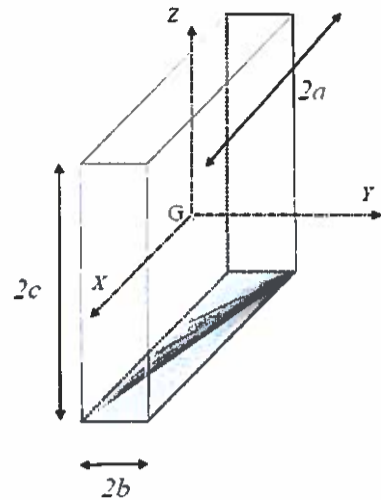
Rappel de cours	Rappelez la formule et les unités des grandeurs ci-dessous dans les cas de rotation et translation. Un schéma peut vous permettre de définir les grandeurs utilisées.				
		Mouvement de rotation		Mouvement de translation	
1pt	Puissance (W)	$P = C \cdot \Omega$	$C \text{ (N.m)}$ $\Omega \text{ (rad/s)}$	$P = F \cdot v$	$F \text{ (N)}$ $v \text{ (m/s)}$
1pt	Energie cinétique (J)	$E_c = \frac{1}{2} J \Omega^2$	$\Omega \text{ (rad/s)}$ $J \text{ (kg/m}^2)$	$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	$m \text{ (kg)}$ $v \text{ (m/s)}$
0,5pt	Energie potentielle de pesanteur (J)		$E_p = mgh$	$m \text{ (kg)}$ $g \text{ (m/s}^2)$ $h \text{ (m)}$	
1pt	Energie potentielle élastique (ressort) (J)	$E_p = \frac{1}{2} k \cdot \Delta x^2$	$\Delta x \text{ (rad/s)}$ $k \text{ (kg/s}^2)$	$E_p = \frac{1}{2} k \cdot \Delta x^2$	$\Delta x \text{ (m)}$ $k \text{ (kg/s}^2)$
1pt	Vitesse (m/s)	$v = R \cdot \theta$	$R \text{ (m)}$ $\theta \text{ (rad/s)}$	$v = \frac{d}{\Delta t}$	$d \text{ (m)}$ $\Delta t \text{ (s)}$
Notion d'effort	Déterminez les composantes de la résultante de ces trois forces agissant sur le crochet.				
2pt			$F_1 \begin{cases} \cos(25) \cdot F_1 = \cos(25) \times 60 \\ \sin(25) \cdot F_1 = \sin(25) \times 60 \end{cases}$ $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ $F_2 \begin{cases} \cos(60) F_2 = \frac{1}{2} \times 40 \\ -\sin(60) \cdot F_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 40 \end{cases}$ $F_3 \begin{cases} -\sin(30) F_3 = -\frac{1}{2} \times 30 \\ -\cos(30) \cdot F_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 30 \end{cases}$ $F_{\text{res}} \begin{cases} \cos(25) \times 60 + 20 & -15 \\ \sin(25) \times 60 - 20\sqrt{3} & -15\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(25) \times 60 + 5 \approx 59,4 \text{ N} \\ \sin(25) \times 60 - 35\sqrt{3} \approx -35,3 \text{ N} \end{cases}$		
Principe Fondamental de la Statique (PFS)	Un artisan utilise une échelle de hauteur $AB = L$ et de masse M pour peindre un mur. Les extrémités de l'échelle s'appuient sur le mur et le sol. Le pied de l'échelle est attaché au point O du mur par l'intermédiaire d'une corde inextensible de longueur l et de masse négligeable de façon que l'échelle fasse un angle θ et assure sa stabilité. Soit G le centre de gravité de l'échelle. Les frottements en A et en B sont nuls.				
2pt	En utilisant le principe fondamental de la statique, montrer que la force dans la corde est: $\ T\ = \frac{1}{2} Mg \cot \theta$				
			$\text{PFS} \cdot \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ $\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$ $\begin{cases} R_A - T = 0 & (1) \\ R_B - Mg = 0 \end{cases}$ $\sum \vec{M}_{\vec{F}_{\text{ext}}, B} = \vec{0} \Leftrightarrow -R_A \sin \theta \cdot L + Mg \cos \theta \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad (2)$ $(1) \quad T = R_A$ $(2) \quad R_A = \frac{Mg \cos \theta \cdot \frac{L}{2}}{\sin \theta \cdot L}$ $\Rightarrow T = \frac{1}{2} Mg \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{2} Mg \cot \theta$		
Remarque : Vous remarquerez qu'il est également possible d'arriver à ce résultat par le théorème des travaux virtuels.					

Calcul d'inertie selon un axe

Donner le moment d'inertie selon Oz des deux solides ci-dessous :

- Un parallélépipède rectangle (2a, 2b, 2c) de masse m.
- Un cône plein de masse m, hauteur H, rayon à la base R. Le volume du cône est le tiers de celui du cylindre.

1,5 pt (parallélépipède)
+
2 pt (cône plein)



$$I_{Az} = \int_V (x^2 + y^2) dm$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{dx dy dz}$$

$$= \rho \int_V (x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$= \rho \left(\int_V x^2 dx dy dz + \int_V y^2 dx dy dz \right)$$

$$= \rho \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a \left[y \right]_{-b}^b \left[z \right]_{-c}^c + \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-b}^b \left[x \right]_{-a}^a \left[z \right]_{-c}^c \right)$$

$$= \rho \times \left(\frac{2a^3}{3} \times 2b \times 2c + \frac{2b^3}{3} \times 2a \times 2c \right) \text{ or } \rho = \frac{m}{8abc}$$

donc $I_{Az} = m \frac{a^2 + b^2}{3}$

$$I_{Az} = \int_V (x^2 + y^2) dm \quad \rho = \frac{dm}{dV} \quad dV = r dr d\theta dz$$

(Vu en TD)

$$I_{Az} = \int_V \rho r^2 dV = \int_V \rho r^2 r dr d\theta dz$$

NE pas oublier: $\tan \alpha = \frac{R}{h} = \frac{r}{z}$ car dépendance h et z

$$d\rho = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 h}$$

$$I_{Az} = \frac{3m}{\pi R^2 h} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \int_0^{\frac{Rz}{h}} r^3 dr dz$$

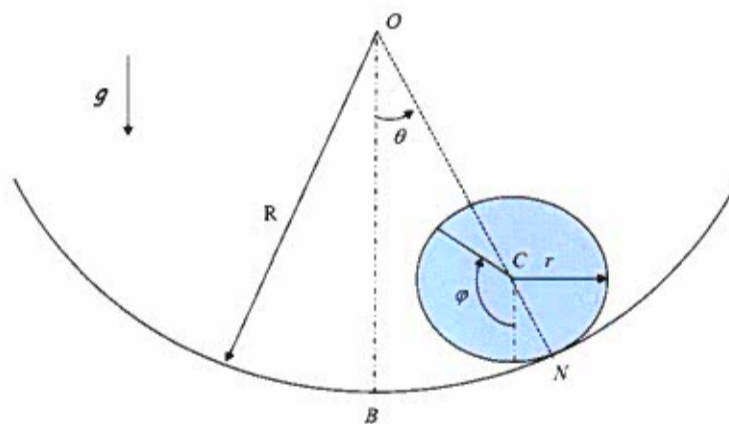
$$I_{Az} = \frac{3}{10} m R^2$$

Equation de Lagrange

Un disque uniforme de masse M, de rayon r et d'épaisseur h, roule sans frottement sur une surface cylindrique de rayon R. L'angle θ mesure le déplacement entre une direction verticale fixe et une ligne prédéfinie du disque.

Déterminer l'équation caractéristique du mouvement du disque à l'aide des équations de Lagrange.

4pt



(0,5) • $E_c = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \Omega^2$ avec $v_G = (R-r)\dot{\theta}$ et $G=0$ pour le disque
 $\Omega = \dot{\varphi}$ $I_G = \frac{MR^2}{2}$ pour le cylindre.

(0,5) • Rsq au pt N: $(R-r)\ddot{\theta} - r\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = \left(\frac{R-r}{r}\right)\ddot{\theta}$

(0,5) • $E_p = Mgz = -Mg(R-r)\cos\theta$

(0,5) • $\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2} M (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \left(\frac{R-r}{r}\right)^2 \dot{\theta}^2 + Mg(R-r)\cos\theta$

(2) $\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$

$$\left[M(R-r)^2 + \frac{MR^2}{2} \left(\frac{R-r}{r}\right)^2 \right] \ddot{\theta} + Mg(R-r)\sin\theta = 0 \quad \div M(R-r)^2$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2} \right) \ddot{\theta} + g \frac{\sin\theta}{R-r} = 0$$