TD 1 "Différences finies"

Formation ModIA, 4A
Toutes les notations utilisées sont celles du cours

Exercice 1 : schéma Leapfrog pour l'équation d'advection

Soit l'équation d'advection discrétisée à l'aide du schéma Leapfrog :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

1 Quels sont les ordres en espace et en temps de ce schéma ?

2 Étudiez la stabilité de ce schéma.

3 Quels sont, selon vous, les avantages et inconvénients de ce schéma ?

Exercice 2 : équation de diffusion discrète

Soit l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

1 Proposez un schéma DF pour la dérivée seconde en espace de u.

2 Utilisez le schéma d'intégration temporelle d'Euler explicite afin d'écrire un schéma discret (en espace et en temps).

3 Quelles sont les conditions de stabilité de ce schéma ?

4 Mettez en perspective les résultats obtenus par rapport à ce qui a été étudié en cours sur l'équation d'advection.

Exercice 3 : Schéma de Lax-Friedrichs pour l'équation de convection

Pour l'équation d'advection, le schéma DF centré associé à une intégration temporelle d'Euler explicite est inconditionnellement instable. Le schéma de Lax-Friedrichs constitue une manière de stabiliser ce schéma, en remplaçant l'évaluation de u_i par une moyenne des états u_{i-1} et u_{i+1}.

1 Montrez que ce schéma peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right) - \frac{\mathcal{C}}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

2 Quelle est la précision en espace de ce schéma ?

3 Faire son analyse de stabilité.

Exercice 4 : Proposition d'un schéma DF pour une dérivée 3e en espace

Soit la dérivée 3e en espace de u, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$. Proposez un schéma DF pour la discrétisation de cette dérivée.