Monotonie et limiteurs

UF « Modélisation et calcul scientifique »
Formation ModIA « Modélisation et Intelligence Artificielle »

Nicolas Bertier (nicolas.bertier@onera.fr)

INSA, 4A

Version du document : 1.4 (dernière modification le 18/01/2023)

Plan du cours

- Exemples de simulations numérique récentes en CFD
- Introduction aux méthodes de différences finies
- Le point sur l'intégration temporelle
- Analyse spectrale et équation équivalente
- **Monotonie et limiteurs**
- Introduction aux méthodes de volumes finis
- Vers la résolution des équations de Navier-Stokes

Monotonie

Définition de la monotonie pour un schéma numérique

Un schéma est dit **monotone** lorsqu'il ne créé **pas de nouveaux extrema**, autre que ceux déjà présents dans la condition initiale.

Conséquence de la définition

Pour un schéma monotone, la solution évaluée à l'instant $n+1$ ne fait apparaître aucun nouvel extremum par rapport à la solution évaluée à l'instant n.

Notations associées au stencil (ou signature) du schéma

- $\mathcal{S}$ représente l'ensemble des variations par rapport à i des indices des points appartenant à la signature du schéma.
- $\mathcal{S}^\star$ représente l'ensemble des variations par rapport à i des indices des points appartenant à la signature du schéma, à l'exception de l'élément "0".

Conséquences de la monotonie pour un schéma numérique

Ecriture compacte d'un schéma discret

Pour un schéma explicite à un pas et une étape, on peut écrire :

$$u_i^{n+1} = b_0 u_i + \sum_{j \in \mathcal{S}^\star} b_j u_{i+j}^n = \sum_{j \in \mathcal{S}} b_j u_{i+j}^n$$

Implication de la consistance sur les coefficients du schéma

- Par définition d'un schéma consistant, une dérivée spatiale discrète doit être **nulle** lorsque la solution est **constante**.
- Comme dans ce cas tous les $u_{i+j}, j \in \mathcal{S}$ sont égaux, cette propriété est assurée ssi $\sum_{j \in \mathcal{S}^\star} b_j = 0$ ou encore, en prenant également en compte le coefficient (unitaire) de la solution au point i dans la somme :

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} b_j = 1$$

Conséquences de la monotonie pour un schéma numérique

Théorème

Pour que la condition de **monotonie** d'un schéma de stencil $\mathcal{S}$ soit satisfaite, tous les coefficients $b_j, j \in \mathcal{S}$ doivent être **positifs ou nuls**.

Corollaire

Un schéma à la fois **consistant** et **monotone** doit donc vérifier :

$$0 \leq b_j \leq 1, \forall j \in \mathcal{S}$$

- Cette condition traduit le fait que le nouvel état u_i^{n+1} est obtenu par une somme d'états obtenus à l'instant n pondérés par des coefficients positifs inférieurs à un.
- Si cette condition est vérifiée, il ne sera donc pas possible de faire apparaître à l'instant $n+1$ des extremas qui n'auraient pas été présents à l'instant n et, par récurrence, dans la condition initiale.

Conséquences de la monotonie pour un schéma numérique

Explicitation du lien entre coefficients b_j et monotonie

La fait qu'un schéma explicite à un pas et une étape soit monotone ssi $0 \leq b_j \leq 1, \forall j \in \mathcal{S}$ peut également s'illustrer en écrivant successivement :

$$
\begin{aligned}
\min(u_i^n) \leq & \quad u_{i+j}^n & \leq \max(u_i^n) \\
b_j \min(u_i^n) \leq & \quad b_j u_{i+j}^n & \leq b_j \max(u_i^n) \\
\sum_{j \in \mathcal{S}} b_j \min(u_i^n) & \leq \textstyle\sum_{j \in \mathcal{S}} b_j u_{i+j}^n & \leq \sum_{j \in \mathcal{S}} b_j \max(u_i^n) \\
\min(u_i^n) \leq & \quad u_i^{n+1} & \leq \max(u_i^n)
\end{aligned}
$$

Cette dernière inégalité traduit bien le fait que, si cette condition est vérifiée, le nouvel état u_i^{n+1} sera toujours compris dans l'intervalle des états de l'instant précédent, et, par récurrence, de la condition initiale.

Conséquences de la monotonie pour un schéma numérique

Autre illustration du lien entre coefficients b_j et monotonie

Une autre manière d'illustrer le lien entre les conditions posées sur les coefficients b_j et la monotonie consiste à écrire successivement :

$$
\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= \sum_{j\in\mathcal{S}} b_j u_{i+j}^n \\
&= b_0 u_i^n + \sum_{j\in\mathcal{S}^\star} b_j u_{i+j}^n \\
&= b_0 u_i^n + \sum_{j\in\mathcal{S}^\star} b_j (u_{i+j}^n - u_i) + \sum_{j\in\mathcal{S}^\star} b_j u_i^n \\
&= \sum_{j\in\mathcal{S}^\star} b_j (u_{i+j}^n - u_i^n) + u_i^n \underbrace{\left(b_0 + \sum_{j\in\mathcal{S}^\star} b_j \right)}_{1}
\end{aligned}
$$

Conséquences de la monotonie pour un schéma numérique

Autre illustration du lien entre coefficients b_j et monotonie

On vient de montrer qu'un schéma explicite à un pas et une étape consistant peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \sum_{j \in \mathcal{S}^\star} b_j (u_{i+j}^n - u_i^n)$$

Par conséquent :

- Si u_i^n est un **minimum local**, alors $(u_{i+j}^n - u_i^n) \geq 0$. Dans le cas où $b_j \leq 1, \forall j \in \mathcal{S}$, alors on a nécessairement $u_i^{n+1} \geq u_i^n$: ce **minimum local ne peut pas décroître** à l'itération $n+1$.
- Si u_i^n est un **maximum local**, alors $(u_{i+j}^n - u_i^n) \leq 0$. Dans le cas où $b_j \leq 1, \forall j \in \mathcal{S}$, alors on a nécessairement $u_i^{n+1} \leq u_i^n$: ce **maximum local ne peut croître** à l'itération $n+1$.

On montre encore une fois que vérifier la condition $0 \leq b_j \leq 1, \forall j \in \mathcal{S}$ implique que le schéma soit **monotone**.

Etude de la monotonie sur deux schémas types

Schéma FOU-EE

Pour rappel, le schéma FOU-EE peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mathcal{C}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)$$

- Première manière d'étudier la monotonie :

$$u_i^{n+1} = (1-\mathcal{C})u_i^n + \mathcal{C}u_{i-1}^n$$

  On montre donc que lorsque ce schéma est stable ($\mathcal{C} \leq 1$), alors celui-ci est également **monotone**.

- Seconde manière d'étudier la monotonie :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \mathcal{C}\left(u_{i-1}^n - u_i^n\right)$$

  On voit également que si le schéma est stable, alors il sera monotone.

Etude de la monotonie sur deux schémas d'ordre deux

Rappel du schéma de BW

On rappelle que le schéma de BW peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\mathcal{C}}{2}\left(3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n\right) + \frac{\mathcal{C}^2}{2}\left(u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n\right)$$

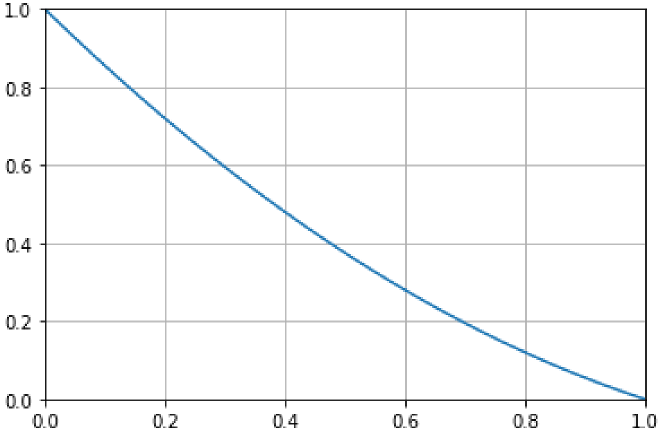
Etude de la monotonie du schéma de BW

Ce schéma peut se reformuler en :

$$u_i^{n+1} = \left(\frac{\mathcal{C}^2}{2} - \frac{3\mathcal{C}}{2} + 1\right) u_i + \left(2\mathcal{C} - \mathcal{C}^2\right) u_{i-1} + \frac{1}{2}\left(\mathcal{C}^2 - \mathcal{C}\right) u_{i-2}$$

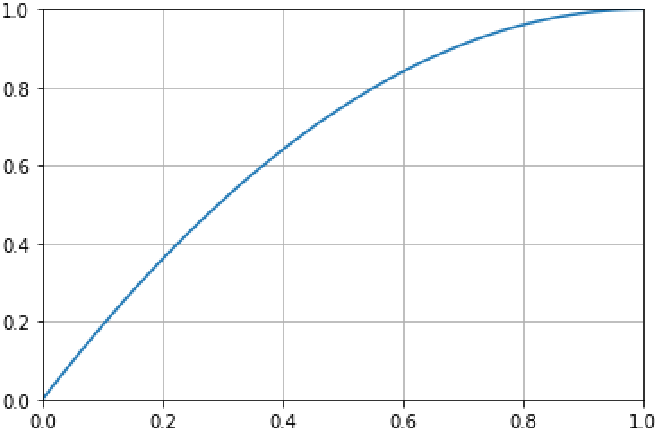
Tous les coefficients devant les états discrets $u_i, i \in \mathcal{S}$ n'étant pas forcément compris entre 0 et 1, ce schéma n'est **pas monotone**.

Evolution du terme $\left(\frac{\mathcal{C}^2}{2} - \frac{3\mathcal{C}}{2} + 1\right)$ en fonction de $\mathcal{C}$



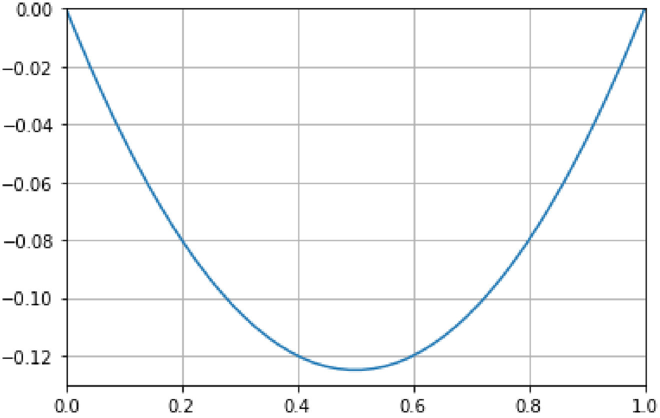
$\Rightarrow$ Ce coefficient répond au critère de monotonie sur la plage de stabilité du schéma

Evolution du terme $\left(2\mathcal{C} - \mathcal{C}^2\right)$ en fonction de $\mathcal{C}$



$\Rightarrow$ Ce coefficient répond au critère de monotonie sur la plage de stabilité du schéma

Evolution du terme $\frac{1}{2}\left(\mathcal{C}^2 - \mathcal{C}\right)$ en fonction de $\mathcal{C}$



$\Rightarrow$ Ce coefficient **ne répond pas** au critère de monotonie sur la plage de stabilité du schéma

$\Rightarrow$ On vérifie ainsi que le schéma de BW n'est **pas monotone**

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Etude de la monotonie sur deux schémas d'ordre deux

Rappel du schéma de LW

On rappelle que le schéma de LW peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\mathcal{C}}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\mathcal{C}^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

Etude de la monotonie du schéma de LW

Ce schéma peut se reformuler en :

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{C}^2 - \mathcal{C}\right) u_{i+1} + \left(1 - \mathcal{C}^2\right) u_i + \left(\frac{\mathcal{C}^2}{2} + \frac{\mathcal{C}}{2}\right) u_{i-1}$$

Tous les coefficients devant les états discrets $u_i, i \in \mathcal{S}$ n'étant pas forcément compris entre 0 et 1, ce schéma n'est **pas monotone**.

Théorème Godunov sur la monotonie

Théorème de Godunov

Tous les schémas **monotones linéaires** pour l'équation d'advection ont nécessairement une précision en espace d'**ordre un**.

Implications du théorème de Godunov

- Tous les schémas linéaires d'**ordre deux en espace** que l'on peut construire par DF pour l'équation d'advection seront **non-monotone**.
- Cela ne signifie pas pour autant que tous les schéma d'ordre un en espace sont monotone (mais on a montré au moins que le schéma décentré FOU l'était).
- Le théorème de Godunov suggère que des schémas **non-linéaires** pourraient potentiellement être **à la fois d'ordre supérieur à un en espace et monotones**.

Etude de la monotonie du schéma semi-discret

Ecriture générique du schéma semi-discret

Dans le cas d'un schéma dont la discrétisation spatiale et l'intégration temporelle peuvent être étudiées de manière séparée, on peut écrire :

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j \in \mathcal{S}} \beta_j u_{i+j}$$

Conditions sur β

- La dérivée spatiale discrète doit être nulle pour une solution constante en espace (tous les $u_{i+j}, j \in \mathcal{S}$ sont alors égaux) $\Rightarrow \sum_j \beta_j = 0$
- On peut montrer que pour qu'un schéma soit **monotone**, il doit vérifier $\forall j \in \mathcal{S}^\star, \beta_j \geq 0$ (cette propriété ne concerne par conséquent pas β_0, qui ne peut être que négatif ou nul).

Réécriture du schéma semi-discret

On peut écrire successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{du_i}{dt} &= \beta_0 u_i + \sum_{j\in\mathcal{S}^\star} \beta_j u_{i+j} \\
&= \beta_0 u_i + \sum_{j\in\mathcal{S}^\star} \beta_j (u_{i+j} - u_i) + \sum_{j\in\mathcal{S}^\star} \beta_j u_i \\
&= \sum_{j\in\mathcal{S}^\star} \beta_j (u_{i+j} - u_i) + u_i \underbrace{\left(\beta_0 + \sum_{j\in\mathcal{S}^\star} \beta_j\right)}_{0}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j\in\mathcal{S}^\star} \beta_j (u_{i+j} - u_i)$$

Comment rendre un schéma monotone

Reformulation du schéma semi-discret SOC

On rappelle que le schéma semi-discret SOC peut s'écrire :

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{2\Delta x}\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right)$$

Ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{a}{2\Delta x}\left[(u_{i-1} - u_i) - (u_{i+1} - u_i)\right]$$

Le coefficient du second terme étant **négatif**, le schéma n'est donc **pas monotone**.

Comment rendre un schéma monotone ?

Exemple : le schéma semi-discret SOC

Afin de comprendre comment agir sur ce schéma afin de le rendre monotone, on peut le réécrire :

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{a}{2\Delta x}\left[1 - \frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i-1} - u_i}\right](u_{i-1} - u_i)$$

Condition de monotonie pour le schéma

Pour que ce schéma soit monotone, il faudrait toujours vérifier que :

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i-1} - u_i} \leq 1$$

Méthodologie :

- Multiplication de ce terme par une **fonction non-linéaire de rapports de pentes** entre gradients successifs, notée Ψ
- Si Ψ est bien choisi, le schéma **peut devenir monotone**.

Limitations pour le schéma de BW

Reformulation du schéma de BW

On rappelle que le schéma de BW peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\mathcal{C}}{2}\left(3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n\right) + \frac{\mathcal{C}^2}{2}\left(u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n\right)$$

Réécriture de ce schéma comme la somme du schéma FOU (monotone) et de gradients pouvant conduire à un comportement non-monotone :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \underbrace{u_i^n - \mathcal{C}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)}_{\text{FOU (monotone)}} \\ &\quad \underbrace{-\frac{\mathcal{C}}{2}(1-\mathcal{C})\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\mathcal{C}}{2}(1-\mathcal{C})\left(u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\right)}_{\text{Partie non monotone}} \end{aligned}$$

Il reste à déterminer les limitations nécessaires pour rendre l'ensemble du schéma monotone !

Limitations pour le schéma de BW

Conditions à appliquer aux limiteurs

Chaque gradient au point courant de la partie non-monotone est pondéré par une fonction de limitation Ψ dépendant du rapport entre :

- le gradient considéré (évalué en i)
- ce même gradient évalué en un point adjacent

On effectue donc les corrections suivantes :

$$
\begin{aligned}
u_i - u_{i-1} \quad &\Rightarrow \quad \Psi(r_i)\,(u_i - u_{i-1}) \text{ avec } r_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}} \\
u_{i-1} - u_{i-2} \quad &\Rightarrow \quad \Psi(r_{i-1})\,(u_{i-1} - u_{i-2}) \text{ avec } r_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i-1} - u_{i-2}}
\end{aligned}
$$

Limitations pour le schéma de BW

Ecriture du schéma de BW limité

Le schéma de BW limité s'écrit alors :

$$u_i^{n+1} = \underbrace{u_i^n - \mathcal{C}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)}_{\text{FOU (monotone)}} \underbrace{-\frac{\mathcal{C}}{2}(1-\mathcal{C})\,\Psi(r_i)\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\mathcal{C}}{2}(1-\mathcal{C})\,\Psi(r_{i-1})\left(u_{i-1}^n - u_{i-2}^n\right)}_{\text{Partie non monotone}}$$

Il reste maintenant à déterminer **les expressions possibles pour le limiteur** Ψ permettant d'assurer la monotonie de ce schéma.

Comment construire Ψ pour assurer la monotonie de BW ?

Le schéma de BM limité peut se réécrire sous la forme :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \mathcal{C}\left\{1 + \frac{1}{2}(1-\mathcal{C})\left[\Psi(r_i) - \frac{\Psi(r_{i-1})}{r_{i-1}}\right]\right\}(u_{i-1}^n - u_i^n)$$

Pour être monotone, ce schéma doit être tel que :

$$\mathcal{C}\left\{1 + \frac{1}{2}(1-\mathcal{C})\left[\Psi(r_i) - \frac{\Psi(r_{i-1})}{r_{i-1}}\right]\right\} \geq 0$$

Ce qui implique la contrainte suivante pour le limiteur Ψ :

$$\frac{1}{2}(1-\mathcal{C})\left[\Psi(r_i) - \frac{\Psi(r_{i-1})}{r_{i-1}}\right] \geq -1 \Rightarrow \Psi(r_i) - \frac{\Psi(r_{i-1})}{r_{i-1}} \geq -\frac{2}{1-\mathcal{C}}$$

Soit finalement :

$$\frac{\Psi(r_{i-1})}{r_{i-1}} - \Psi(r_i) \leq \frac{2}{1-\mathcal{C}}$$

Limitations pour le schéma de LW

Reformulation du schéma de LW

On rappelle que le schéma de LW peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\mathcal{C}}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\mathcal{C}^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

Réécriture de ce schéma comme la somme d'une contribution monotone et de gradients pouvant conduire à un comportement non-monotone :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} \quad = \quad & \underbrace{u_i^n - \mathcal{C}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)}_{\text{FOU (monotone)}} \\ & \underbrace{-\frac{\mathcal{C}}{2}(1-\mathcal{C})\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right) + \frac{\mathcal{C}}{2}(1-\mathcal{C})\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)}_{\text{Partie non monotone}} \end{aligned}$$

Limitations pour le schéma de LW

Ecriture du schéma de LW limité

Le schéma de LW limité s'écrit alors :

$$
\begin{aligned}
u_i^{n+1} \quad = \quad & \underbrace{u_i^n - \mathcal{C}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)}_{\text{FOU (monotone)}} \\
& \underbrace{-\frac{\mathcal{C}}{2}\left(1-\mathcal{C}\right)\Psi(R_i)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right) + \frac{\mathcal{C}}{2}\left(1-\mathcal{C}\right)\Psi(R_{i-1})\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)}_{\text{Partie non monotone}}
\end{aligned}
$$

avec :

$$R_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i} = \frac{1}{r_i} \text{ et } R_{i-1} = \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{u_i - u_{i-1}} = \frac{1}{r_{i-1}}$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Comment construire Ψ pour assurer la monotonie de LW ?

Le schéma de LW limité peut se réécrire sous la forme :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \mathcal{C}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(1 - \mathcal{C}\right)\left[\frac{\Psi(R_i)}{R_i} - \Psi(R_{i-1})\right]\right\}\left(u_{i-1}^n - u_i^n\right)$$

Pour être monotone, ce schéma doit être tel que :

$$\mathcal{C}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(1 - \mathcal{C}\right)\left[\frac{\Psi(R_i)}{R_i} - \Psi(R_{i-1})\right]\right\} \geq 0$$

Ce qui implique la contrainte suivante pour le limiteur Ψ :

$$\frac{1}{2}\left(1 - \mathcal{C}\right)\left[\frac{\Psi(R_i)}{R_i} - \Psi(R_{i-1})\right] \geq -1 \Rightarrow \frac{\Psi(R_i)}{R_i} - \Psi(R_{i-1}) \geq -\frac{2}{1 - \mathcal{C}}$$

Soit finalement :

$$\frac{\Psi(R_i)}{R_i} - \Psi(R_{i-1}) \leq \frac{2}{1 - \mathcal{C}}$$

Propriétés générales des fonctions de limitations

Principales propriétés

On pourra montrer (cf. cours VF) que, de manière générale, les fonctions de limitation non-linéaires ("limiteurs") doivent vérifier les inégalités :

$$0 \leq \Psi(r) \leq \min\left(\frac{2r}{\mathcal{C}}, \frac{2}{1-\mathcal{C}}\right)$$

Remarques :

- Pour $\Psi(r) = 1$, le schéma est non limité (et donc non monotone)
- Pour $\Psi(r) = 0$, le schéma se réduit au schéma FOU (monotone mais d'ordre un)

Fonctions de limitations classiques

Min-Mod

Limite inférieure du domaine TVD :

$$\Psi(r) = \begin{cases} \min(r,1) & \text{si } r \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce limiteur est très dissipatif.

Superbee

Limiteur, excellent pour les discontinuités mais très compressif (à tendance à "raidifier" fortement les solutions) :

$$\Psi(r) = \max\left[0, \min(2r,1), \min(r,2)\right]$$

Fonctions de limitations classiques

Van-Leer

Limiteur qui a été extrêmement utilisé, bon compromis, défini comme :

$$\Psi(r) = \frac{r + |r|}{1 + r}$$

Van-Albada

Comportement plus régulier que le limiteur de Van-Leer :

$$\Psi(r) = \frac{r^2 + r}{r^2 + 1}$$

Evolution de limiteurs classiques en fonction de r

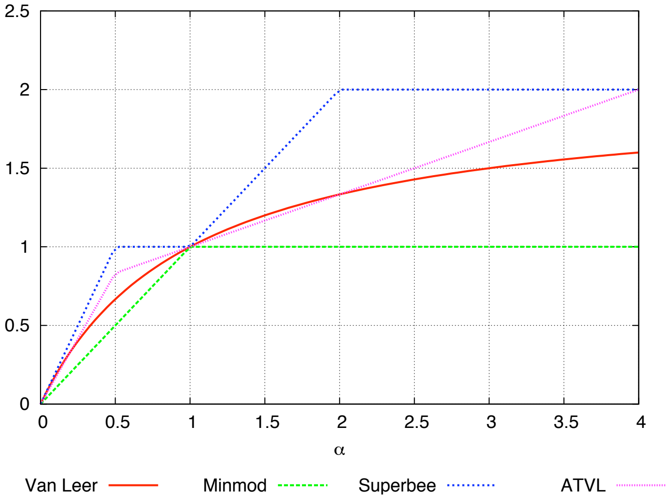


Schéma LW sans limiteur (rappel)

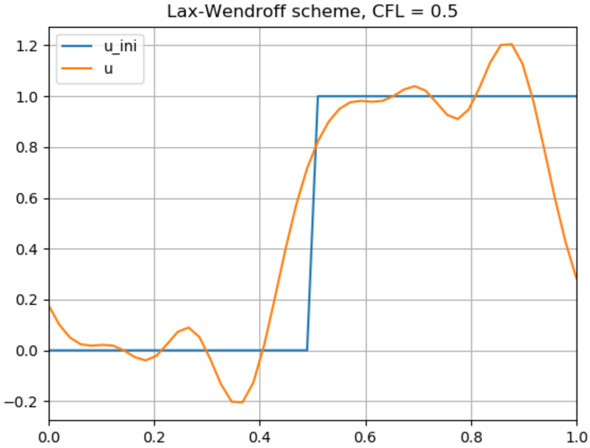


Schéma LW avec limiteur de Van-Leer

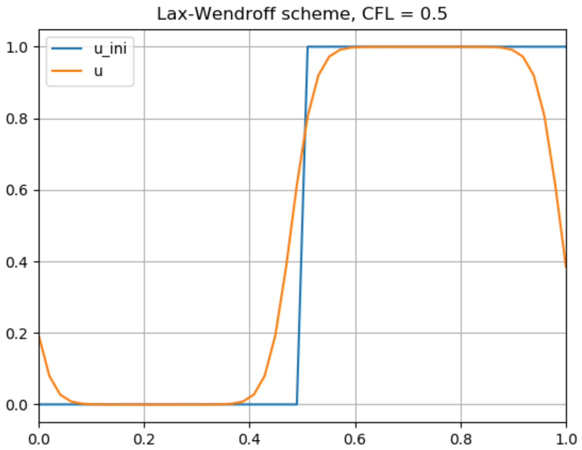


Schéma BW sans limiteur (rappel)

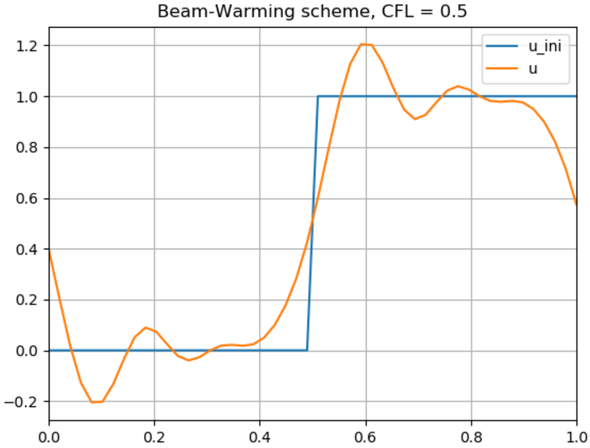


Schéma BW avec limiteur de Van-Leer

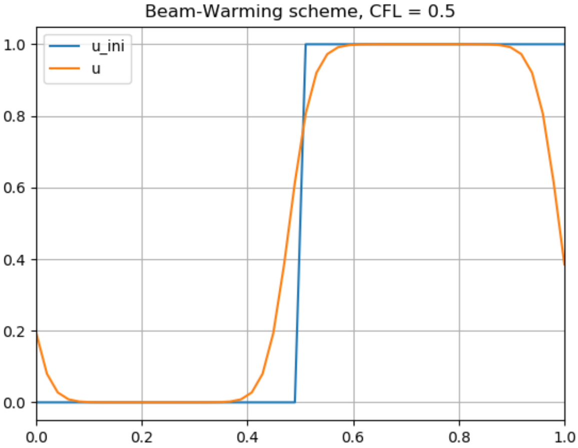


Schéma LW avec limiteur Min-mod

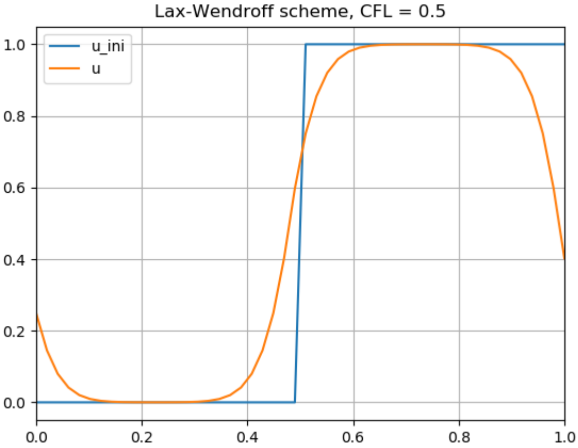


Schéma LW avec limiteur Superbee