

## TD 2 : Différences Finies

*UF « Modélisation et calcul scientifique »*  
*Formation ModIA « Modélisation et Intelligence Artificielle »*

Nicolas Bertier (nicolas.bertier@onera.fr)

INSA, 4A

## Schéma Second Order Centered **Implicit** Euler (SOC-IE)

Schéma **implicite** SOC-IE au point courant :

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}) \quad \forall a > 0$$

- Matrice jacobienne  $J$  du système
- Valeurs propres du système semi-discret en espace (valeurs propres de  $J$ )
- Expression de la vitesse complexe puis l'équation de dispersion
- Donner l'ordre de la méthode et la valeur du premier terme d'erreur non nul. De quel type d'erreur s'agit-il ?
- Ce schéma sera-il stable avec une intégration temporelle d'Euler explicite ? Et avec une intégration temporelle d'Euler implicite ?
- Ecrire le système à résoudre si l'on souhaite intégrer ce système avec une méthode d'Euler implicite.

## Etude du schéma centré d'ordre 2 SOC

### Rappel du schéma semi-discret SOC

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}) \quad \forall a > 0$$

### Matrice jacobienne $J$

$$J = -\frac{a}{2\Delta x} (P_m - P_m^{-1})$$

### Valeurs propres

$$\bar{\lambda}_\alpha = -\frac{a}{2\Delta x} \left[ e^{(j\frac{2\pi}{m})^\alpha} - e^{-(j\frac{2\pi}{m})^\alpha} \right]$$

Soit, en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\bar{\lambda}_\alpha = -\frac{a}{\Delta x} j \sin \varphi_\alpha$$

## Expression de la vitesse complexe $\overline{v}_\alpha$ :

On rappelle que :

$$\overline{v}_\alpha = j \frac{\overline{\lambda}_\alpha}{k_\alpha} = -\frac{\Im(\overline{\lambda}_\alpha)}{k_\alpha} + j \frac{\Re(\overline{\lambda}_\alpha)}{k_\alpha}$$

Soit :

$$\overline{v}_\alpha = -\frac{\Im(\overline{\lambda}_\alpha)}{k_\alpha} = \frac{a}{k_\alpha \Delta x} \sin \varphi_\alpha = \frac{a}{\varphi_\alpha} \sin \varphi_\alpha$$

## Equation de dispersion

L'équation de dispersion et son lien avec la dissipation  $\overline{\nu}_\alpha$  et la dispersion  $\overline{\xi}_\alpha$  s'écrivent :

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = -\frac{\Im(\overline{\lambda}_\alpha)}{k_\alpha a} + j \frac{\Re(\overline{\lambda}_\alpha)}{k_\alpha a} = \overline{\xi}_\alpha - j \overline{\nu}_\alpha$$

On remarque que la **dissipation de ce schéma est identiquement nulle** quelle que soit la longueur d'onde considérée.

## D.L. de l'équation de dispersion pour $k \rightarrow 0$

On rappelle que le développement limité de l'équation de dispersion autour des grandes longueurs d'onde (i.e  $k \rightarrow 0$ ) s'écrit :

$$\frac{\bar{v}_\alpha}{a} = 1 + \bar{E}_0 - j\bar{E}_1\varphi_\alpha + \bar{E}_2\varphi_\alpha^2 + j\bar{E}_3\varphi_\alpha^3 + \dots$$

## Equation équivalente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = a\Delta x \bar{E}_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\Delta x^2 \bar{E}_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a\Delta x^3 \bar{E}_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

Equation de dispersion :

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = \frac{1}{\varphi_\alpha} [\sin(\varphi_\alpha)]$$

Identification des coefficients d'erreur

Développement de l'équation de dispersion (cf. TD) :

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = \frac{1}{\varphi_\alpha} \left[ \varphi_\alpha - \frac{1}{3!} \varphi_\alpha^3 + \frac{1}{5!} \varphi_\alpha^5 + \mathcal{O}(\varphi_\alpha^7) \right]$$

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = 1 - \frac{1}{3!} \varphi_\alpha^2 + \frac{1}{5!} \varphi_\alpha^4 + \mathcal{O}(\varphi_\alpha^6)$$

Coefficients d'erreur :

$$\overline{E}_1 = 0; \overline{E}_2 = -\frac{1}{3!}; \overline{E}_3 = 0; \overline{E}_4 = \frac{1}{5!}$$

Le schéma obtenu est bien consistant et d'ordre deux.

## Stabilité du schéma

Les valeurs propres du schéma semi-discret en espace sont toutes situées sur l'axe des imaginaires.

- Le domaine de stabilité du schéma **d'Euler explicite** étant un disque dans le demi-plan gauche du plan complexe tangent à l'axe des imaginaires, il ne pourra jamais contenir le lieu des valeurs propres du schéma semi-discret : l'intégration du schéma SOC par la méthode d'Euler explicite conduira à un schéma discret **inconditionnellement instable**.
- Le domaine de stabilité du schéma **d'Euler implicite** étant l'ensemble du plan complexe privé d'un disque dans le demi-plan droit du plan complexe tangent à l'axe des imaginaires, il contiendra toujours le lieu des valeurs propres du schéma semi-discret : l'intégration du schéma SOC par la méthode d'Euler implicite conduira à un schéma discret **inconditionnellement stable**.

## Etude de la précision du schéma FOU

Equation de dispersion :

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = -\frac{1}{\varphi_\alpha} [-\sin(\varphi_\alpha) + j(1 - \cos(\varphi_\alpha))]$$

Identification des coefficients d'erreur

Développement de l'équation de dispersion (cf. TD) :

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = 1 - j\frac{1}{2}\varphi_\alpha - \frac{1}{6}\varphi_\alpha^2 + j\frac{1}{24}\varphi_\alpha^3 + \mathcal{O}(\varphi_\alpha^4)$$

Coefficients d'erreur :

$$\overline{E}_1 = +\frac{1}{2}; \overline{E}_2 = -\frac{1}{6}; \overline{E}_3 = -\frac{1}{24}$$

Le schéma obtenu est bien consistant et d'ordre un ( $\overline{E}_1$  non nul).



## Etude de la précision du schéma décentré d'ordre deux

Equation de dispersion :

$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = -\frac{1}{2\varphi_\alpha} \left[ -\sin(\varphi_\alpha) (3 - \cos(\varphi_\alpha)) + j(1 - \cos(\varphi_\alpha))^2 \right]$$

Identification des coefficients d'erreur

Développement de l'équation de dispersion :

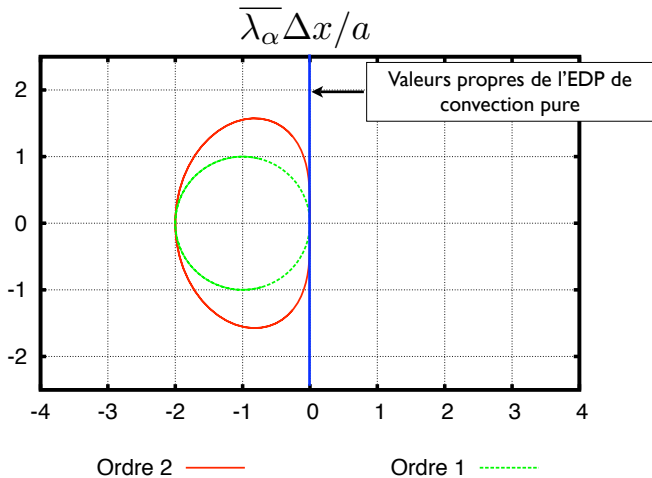
$$\frac{\overline{v}_\alpha}{a} = 1 + \frac{1}{12}\varphi_\alpha^2 - j\frac{1}{8}\varphi_\alpha^3 + \mathcal{O}(\varphi_\alpha^4)$$

Coefficients d'erreur :

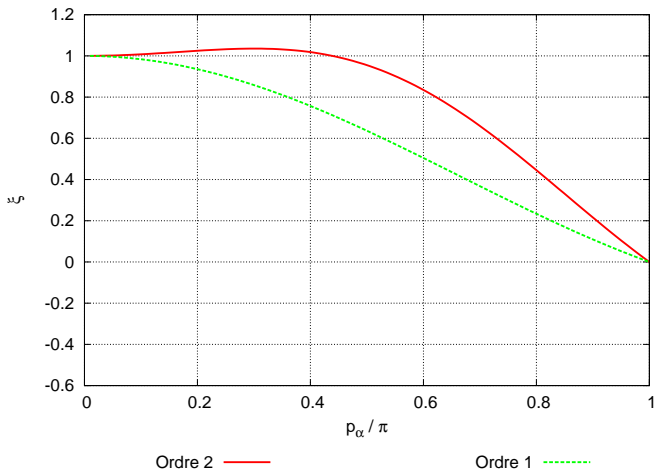
$$\overline{E}_1 = 0; \overline{E}_2 = \frac{1}{12}; \overline{E}_3 = -\frac{1}{8}$$

Le schéma obtenu est bien consistant et d'ordre deux ( $\overline{E}_1$  nul,  $\overline{E}_2$  non nul).

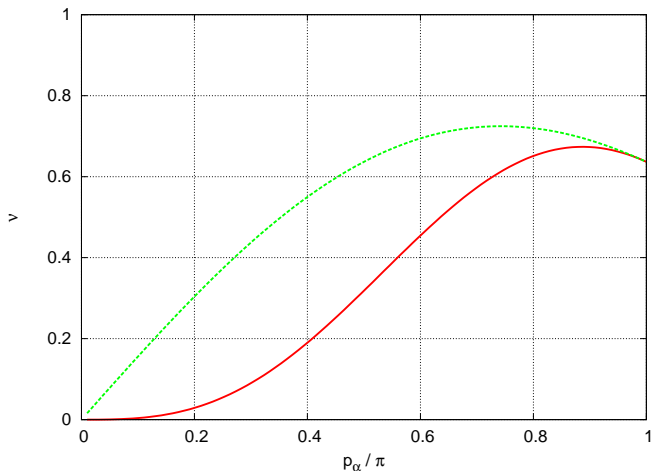
## Lieux de $\overline{\lambda}_\alpha \Delta x / a$ pour les schémas FOU et UPO2VF



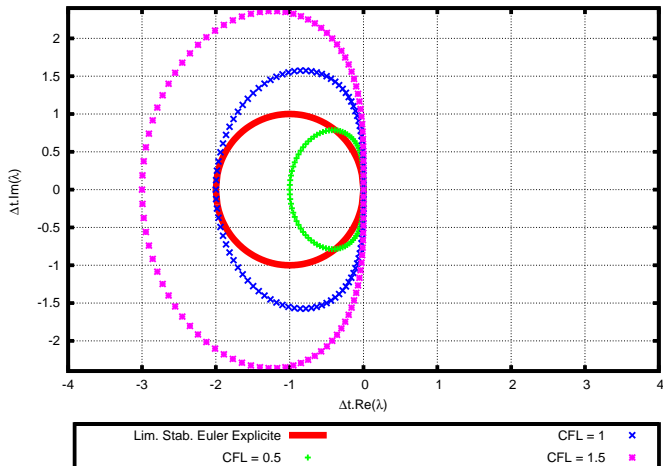
## Dispersion des schémas décentrés d'ordre un et deux en fonction du nombre d'ondes



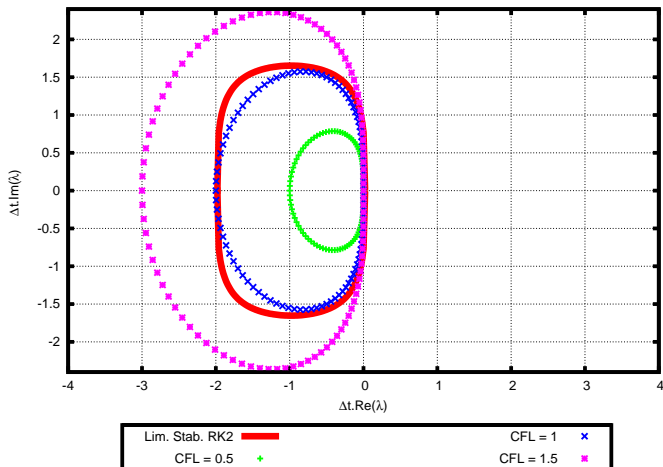
## Dissipation des schémas décentrés d'ordre un et deux en fonction du nombre d'ondes



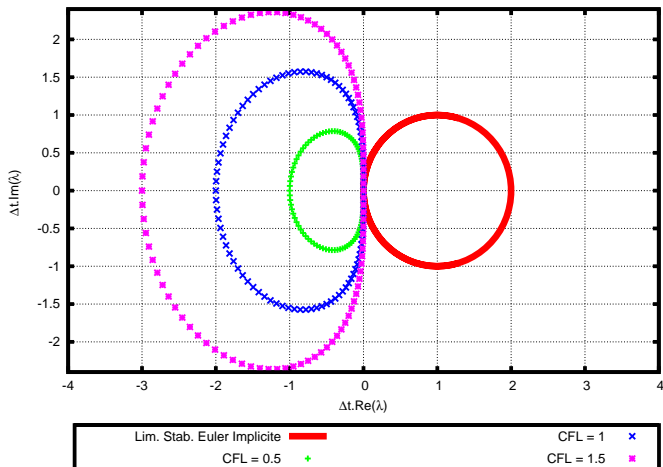
## Confrontation des valeurs propres du schéma d'Euler explicite avec celles de la discrétisation spatiale (UPO2VF)



## Confrontation des valeurs propres du schéma RK2 avec celles de la discrétisation spatiale (UP O2)



# Confrontation des valeurs propres du schéma d'Euler implicite avec celles de la discrétisation spatiale (UPO2VF)



## Schéma Second Order Centered **Implicit** Euler (SOC-IE)

Schéma **implicite** SOC-IE au point courant :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\mathcal{C}}{2} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})$$

Ce qui peut se réécrire :

$$u_i^{n+1} + \frac{\mathcal{C}}{2} u_{i+1}^{n+1} - \frac{\mathcal{C}}{2} u_{i-1}^{n+1} = u_i^n$$

Soit, sous forme d'un système pour l'ensemble des points du maillage :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{C}/2 & \dots & 0 & -\mathcal{C}/2 \\ -\mathcal{C}/2 & 1 & \mathcal{C}/2 & \dots & 0 \\ 0 & -\mathcal{C}/2 & 1 & \mathcal{C}/2 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathcal{C}/2 & \dots & 0 & -\mathcal{C}/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}^n$$