Mécanique du point matériel
Travaux dirigés
Année 2024/2025

Département STPI
$1^{\text{ère}}$ Année
UF I1ANPH12
Responsable : I. Gerber (igerber@insa-toulouse.fr)

Cinématique d'un point matériel – Chapitre 1

Analyse vectorielle, Mouvements, Trajectoires

Exercice 1 : Mouvement circulaire, coordonnées polaires

Nous nous intéressons au mouvement circulaire d'un point matériel M dans un référentiel $\mathcal{R}\,(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, t)$ doté d'un repère d'observation cartésien. La position du point M est repérée sur son orbite, de rayon R, grâce à l'angle $\theta(t)$ entre l'axe (Ox) et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

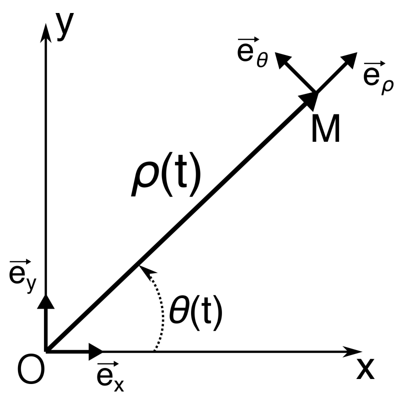
1. Faire une représentation schématique de la situation, on y reportera les axes, les vecteurs unitaires $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, le point M repéré par l'angle θ, ainsi que sa trajectoire.
2. Sur ce même schéma, représenter les vecteurs de la base polaire $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$.
3. Etablir l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ puis dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$ en fonction de R et $\theta(t)$.
4. Dériver le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps et établir les expressions du vecteur vitesse qu'on notera $\vec{v}_M$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ puis dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$, en fonction de R, $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.
5. En déduire une expression simple de la norme du vecteur vitesse.
6. Déterminer l'expression de l'accélération $\vec{a}_M$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ puis dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$, en fonction de R, $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ et $\ddot{\theta}(t)$.
7. Représenter les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{e_N}, \vec{e_T})$, dans le cas où $\dot{\theta}(t) > 0$.
8. Déterminer les composantes de l'accélération dans le repère de Frenet.

Exercice 2 : Mouvement en spirale

On considère un point matériel M, décrivant une spirale dans le plan (xOy) dont les équations paramétriques sont :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & b\,\theta\,\cos(\theta) \\ y & = & b\,\theta\,\sin(\theta) \end{array} \right. ,$$

avec b une constante, l'angle θ comme repéré sur le schéma. On notera $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left(= \dot{\theta}\right)$ qui sera une constante positive. A l'origine du temps $t = 0$, nous avons $\theta(0) = 0$.



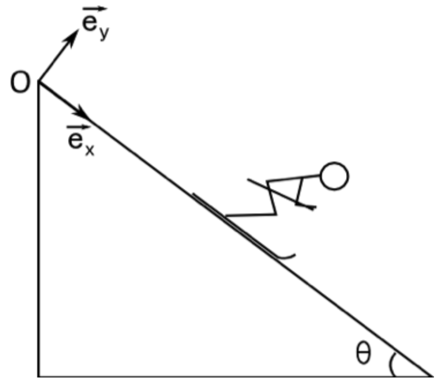
$(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ et ainsi que $(O, \vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$, constituent des repères d'observation, pour le référentiel $\mathcal{R}\,(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, t)$ dans lequel est étudié le mouvement.

1. Déterminer, dans le repère $(0, \vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$, les expressions
   (a) du vecteur position $\overrightarrow{OM}$,
   (b) du vecteur vitesse $\vec{v}_M$,
   (c) du vecteur accélération $\vec{a}_M$.
2. En déduire l'expression de la norme du vecteur vitesse, notée $||\vec{v}_M||$.

3. Représenter les vecteurs de la base de Frenet $(\overrightarrow{e_T}, \overrightarrow{e_N})$ sur le schéma.
4. Montrer que $\overrightarrow{e_T} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega t)^2}}\overrightarrow{e_\rho} + \dfrac{\omega t}{\sqrt{1+(\omega t)^2}}\overrightarrow{e_\theta}$.
5. En se rappelant que $(\overrightarrow{e_T}, \overrightarrow{e_N}, \overrightarrow{e_B})$ est une base orthonormée directe, déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{e_N}$ dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta})$.
6. Etablir les expressions des composantes tangentielle (a_T) puis normale (a_N) de l'accélération $\vec{a}_M$.
7. En déduire l'expression du rayon de courbure R de la trajectoire à n'importe quel instant t.

Exercice 3 : le skieur de vitesse

Un skieur de masse m descend en ligne droite une piste de vitesse d'inclinaison θ. On assimile le skieur à une masse ponctuelle M. Le mouvement est étudié dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ de repère d'observation $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$. A l'instant $t = 0$ le skieur a une vitesse nulle et se trouve en $(0, 0)$. Lors de sa descente il subit une force due aux frottements de la piste, qu'on va approcher comme un frottement cinétique de coefficient f_c. On néglige les frottements de l'air dans un premier temps.



1. Déterminer dans le repère $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$, les expressions de la vitesse $\vec{v}_M$ ainsi que de l'accélération $\vec{a}_M$ du skieur.
2. Faire le bilan des forces subies par le skieur dans le référentiel $\mathcal{R}$ et donner leurs expressions dans le repère $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$.
3. Quelle(s) force(s) exerce(nt) le skieur sur la piste ?
4. En appliquant le PFD, déterminer l'équation différentielle régissant le comportement temporel du vecteur $\vec{v}_M$.
5. Quelle vitesse maximale le skieur peut-il atteindre ?

En réalité, dès que $||\vec{v}_M|| > 18\text{km/h}$, il faut considérer les frottements de l'air, avec une force agissant sur le skieur de la forme :

$$\vec{F}_{\text{air}} = -\beta ||\vec{v}_M|| \vec{v}_M,$$

où β est un coefficient constant.

6. En appliquant le PFD, montrer qu'on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\dot{v}_M + \frac{\beta}{m} v_M^2 = g \left(\sin\theta - f_c \cos\theta\right).$$

7. Quelle est la vitesse limite atteinte par le skieur en régime permanent ?
8. Application numérique : $m = 90$ kg, $\theta = 28°$, $f_c = 0{,}2$, $g = 9{,}81$ m s^{-2}, $\beta = 0{,}09$ N m^{-2} s^2.
9. Comment faire pour augmenter cette vitesse limite ?

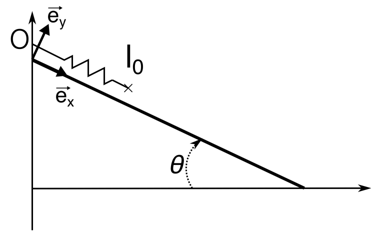
Le record du monde de vitesse de 255,5 km/h est détenu par le français Simon Billy depuis mars 2023. Il a atteint cette vitesse sur une piste de Vars avec une pente moyenne de 52%, avec un départ à 98% ($\sim 45°$).

Exercice 4 : Le pendule

Un point matériel M est suspendu à un fil de longueur l sans masse. La position de M est définie par l'angle θ. On écarte M de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 puis on le lâche sans vitesse initiale. L'origine du temps est prise à cet instant. Le mouvement est étudié dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}\,(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}, t)$, on négligera les frottements dans ce problème et on considèrera le mouvement dans le plan (xOy).

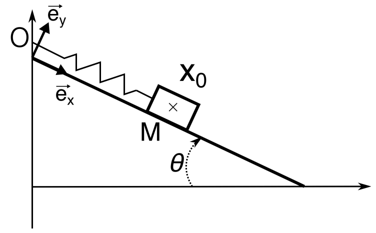
1. Faire un schéma, en faisant particulièrement attention à représenter les vecteurs $\vec{e_z}$, $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$.
2. Etablir les expressions de $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}_M$ et de $\vec{a}_M$ dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$.
3. Faire le bilan des forces subies par le point matériel M dans le référentiel $\mathcal{R}$ et donner leurs expressions dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$.
4. Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.
5. Résoudre cette équation dans le cas des petites oscillations.
6. Application numérique : Calculer la période des oscillations avec un fil de longueur l =1 m et g =9,81 m.s^{-2}.

Exercice 5 : masse accrochée par un ressort sur un plan incliné

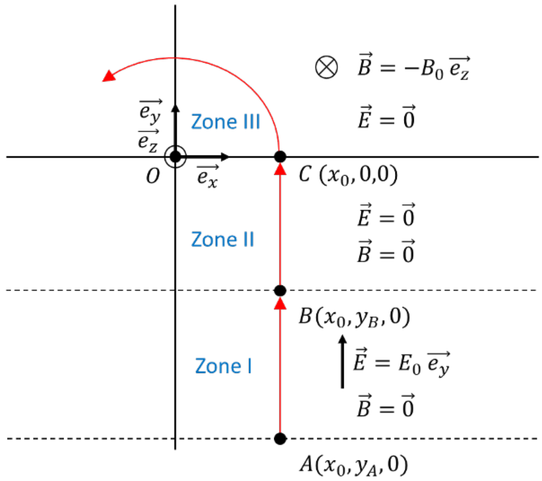


On considère une masse m qui se déplace sans frottement sur un plan incliné d'un angle θ constant, retenue par un ressort de constante de raideur k, de longueur à vide l_0 comme représenté sur le schéma.

1. Quel est l'allongement du ressort lorsque la masse ponctuelle m est à l'équilibre ?
2. On réalise dans un second temps une expérience de lâcher qui consiste à écarter la masse m d'une quantité d par rapport à sa position d'équilibre sans vitesse initiale. Décrire le mouvement de la masse qui en résulte.



Exercice 6 : le spectromètre de masse – mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique et dans un champ magnétique.



On considère une particule de charge $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C et de masse m=$1{,}67 \times 10^{-27}$ kg se déplaçant dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}\,(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}, t)$. Nous allons étudier à tour de rôle l'effet d'un champ électrique $\vec{E}$ et l'effet d'un champ magnétique $\vec{B}$ sur la particule. On négligera le poids dans la suite de l'exercice.

1. Quelle est la nature de la particule considérée ?
2. Donner l'expression de la force de Lorentz.

Effet du champ électrique (Zone I)

3. La particule M est située à l'instant $t = 0$ en un point A de coordonnées $(x_0, y_A, 0)$. Sa vitesse initiale est nulle. Un champ électrique uniforme ($\vec{E} = E_0\ \vec{e_y}$ avec E_0 une constante positive) est appliqué dans la zone I pour $y_A \leq y \leq y_B$.
   (a) Appliquer le PFD dans le référentiel $\mathcal{R}$ pour déterminer les composantes de la vitesse de la particule.
   (b) Déterminer la position de la particule au cours du temps. Montrer qu'elle quitte la zone I en passant par le point B.
   (c) Calculer le travail effectué par la force électrique entre les points A et B en fonction de q, E_0 et $\Delta y = y_B - y_A$.
   (d) Grâce au théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse acquise par la particule lorsqu'elle arrive au point B. On appellera cette vitesse $v_B = v_0$.

Mouvement dans la zone libre (Zone II)

4. Quel est le bilan des forces dans la Zone II où $y_B \leq y \leq 0$. Comment évolue la vitesse de la particule dans cette zone ?

Effet du champ magnétique (Zone III)

5. On définit une nouvelle origine des temps de sorte que la particule M est située à l'instant $t = 0$ au point C de coordonnées $(x_0, 0, 0)$. Sa vitesse initiale est $\vec{v} = v_0\ \vec{e_y}$. Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B_0\ \vec{e_z}$, avec B_0 une constante positive, règne dans tout le demi-espace où $y \geq 0$.
   (a) Exprimer les composantes F_x, F_y, F_z de la force subie par la particule à un instant t quelconque en fonction de B_0, q et des composantes de la vitesse v_x et v_y.
   (b) Montrer que le mouvement de la particule est inscrit dans le plan (xOy).

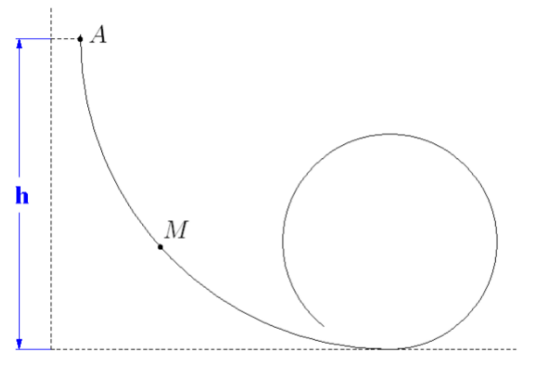
(c) A l'aide du théorème de l'énergie cinétique sous forme différentielle, montrer que la norme du vecteur vitesse reste constante au cours de la trajectoire dans la zone III.

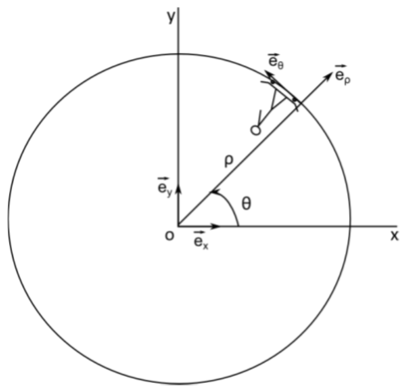
(d) Redonner l'expression de l'accélération dans la base de Frenet.

(e) En déduire que le mouvement de la particule est circulaire, avec un rayon $R = \dfrac{v_0}{\omega}$, avec $\omega = \dfrac{qB_0}{m}$ que l'on nomme pulsation cyclotron.

(f) En quoi peut-on dire que ce système constitue un spectromètre de masse (système capable de séparer les composants selon leur masse) ?

Exercice 7 : Le skate-boarder





Un skateboarder souhaite réaliser une performance exceptionnelle : il envisage de s'élancer sans vitesse initiale depuis le haut d'une rampe à l'altitude h, de se laisser glisser, puis de terminer sa course par une grande boucle (un looping) de rayon fixe ρ. Plus l'altitude h est petite, plus la performance sera remarquable ! Cependant le skateboarder n'est pas fou : il souhaite calculer au préalable l'altitude h minimum pour être certain de ne pas « décrocher » une fois dans le looping... Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au mouvement du skateboarder, assimilé un point matériel M de masse m évoluant à l'intérieur d'un cercle de rayon ρ. Le mouvement se fait sans frottement. On nommera le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ supposé galiléen, dans lequel la rampe et le looping sont fixes.

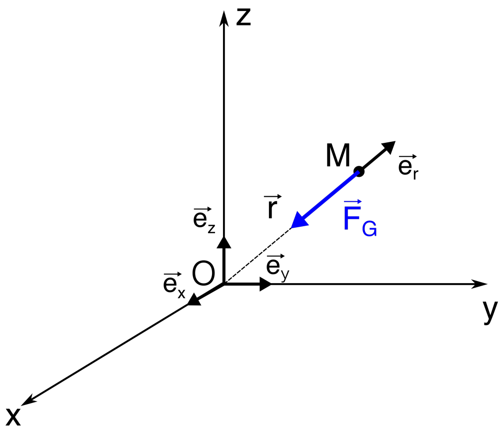
1. Établir l'expression de l'accélération, exprimer la selon les vecteurs de base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$.
2. Lister et étudier le(s) force(s) appliqué(es) sur le skateboarder.
3. Écrire l'équation fondamentale de la dynamique. Que devient cette équation en la projetant sur les vecteurs de base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$?
4. Calculer le travail des forces subies par le skateboarder. En déduire l'expression de l'énergie potentielle du skateboarder.
5. Grâce au théorème de l'énergie mécanique déterminer la norme de vecteur vitesse v en un point quelconque de la trajectoire si v_0 est la norme du vecteur vitesse en bas de la trajectoire.
6. Comment évolue la réaction du support sur le skateboarder en fonction de θ ?
7. Finalement... quelle est l'altitude minimum h à partir de laquelle le skateboarder peut s'élancer sur la rampe sans vitesse initiale, pour que ce dernier adhère à la boucle tout au long de sa trajectoire ?

Exercice 8 : Force centrale et vitesse de libération

La force de gravitation agissant sur un point matériel de masse m sur Terre suit la loi :

$$\overrightarrow{F_G} = \frac{-GmM_T}{r^2}\overrightarrow{e_r},$$

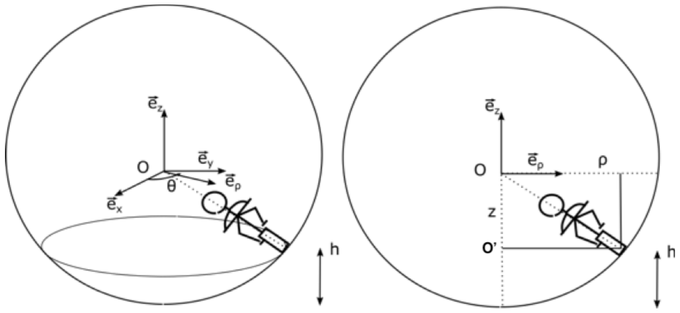
où G est la constante universelle de gravitation, M_T la masse de la Terre et r la distance $||\overrightarrow{OM}||$, O étant le centre de la Terre. On suppose ici $r > R_T$ avec R_T le rayon de la Terre, l'altitude d'un point par rapport au sol est donc défini par $h = r - R_T$.



1. Que peut-on dire du travail d'une force conservative ?
2. Montrer que la force de gravitation dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$ que l'on calculera, et on prendra $Ep(\infty) = 0$.
3. En déduire le travail minimal $W(h)$ qu'il faut fournir pour élever la masse m de l'altitude 0 à une altitude h sans lui fournir d'énergie cinétique.
4. On appelle « vitesse de libération » $v_{\text{lib}}(h)$ à l'altitude h, la vitesse minimale que doit avoir le point matériel pour échapper à l'attraction terrestre (et donc s'éloigner jusqu'à l'infini avec une vitesse nulle). Etablir son expression.
5. Applications numériques : Quelle est sa valeur au sol ? Et pour une altitude de 300 km ? On donne $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ m^3 kg^{-1}s^{-2}, $M_T = 6\ 10^{24}$ kg, $R_T = 6400$ km.
6. Quelle est la vitesse de libération à la surface de la Lune ? $M_L = 7{,}3\ 10^{22}$ kg et $R_L = 1700$ km.

Exercice 9 : Le globe de la mort

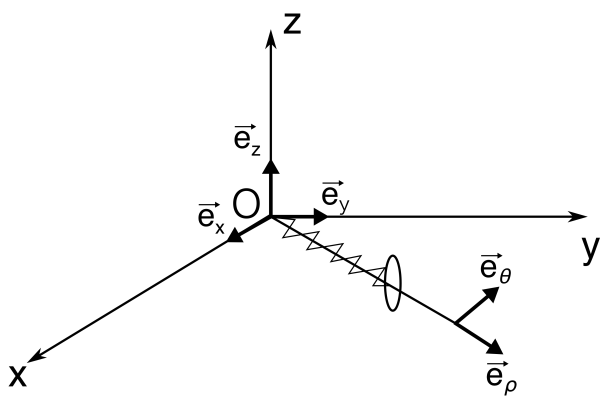
Un cycliste se met en mouvement dans une sphère de rayon R et finit par se stabiliser sur un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω à une hauteur h. On considère les frottements nuls. En conséquence, une fois la hauteur h atteinte le cycliste ne pédale plus. Le mouvement sera étudié dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'\,(O', \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}, t)$ tournant à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe (Oz), le référentiel $\mathcal{R}\,(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, t)$ est lui galiléen.



1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{O'M}$, $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}'}$ dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.
2. Faire le bilan des forces subies par le cycliste dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et donner leurs expressions dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.
3. Appliquer le PFD dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ pour déterminer la hauteur h atteinte par le cycliste.
4. Expliquer pourquoi le cycliste n'a plus besoin de pédaler si on considère que les frottements sont nuls.

Exercice 10 : Gyromètre

Un anneau de masse m est enfiché dans une tige qui est en rotation dans le plan (xOy) à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical (Oz). L'anneau est maintenu par un ressort de constante de raideur k. La longueur au repos du ressort est ρ_0. Nous allons étudier le mouvement de l'anneau assimilé à une masse ponctuelle dans le référentiel $\mathcal{R}'\,(O, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}, t)$ non galiléen tournant à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe (Oz). le référentiel $\mathcal{R}\,(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, t)$ est supposé galiléen. A l'instant $t = 0$, l'anneau se situe au point de coordonnées ($\rho = \rho_0$, $\theta = 0$, $z = 0$) et a pour vitesse initiale dans $\mathcal{R}'$: $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}(0) = \vec{0}$.



1. Représenter les coordonnées ρ et θ sur le schéma.

2. Déterminer les expressions des vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ et accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$ dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$.

Partie A : On considère que l'anneau peut glisser sans frottement autour de la tige, on notera $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ dans la suite.

3. Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse dans le référentiel $\mathcal{R}'$.
4. Existe-t-il une position d'équilibre ? Si oui la déterminer.
5. Résoudre l'équation différentielle afin de déterminer la position de l'anneau à chaque instant $\rho(t)$, dans le cas où $\omega < \omega_0$.

Partie B : On considère que l'anneau est soumis à une force de frottement fluide linéaire, s'opposant à sa vitesse par rapport à la tige :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}.$$

6. Comment réaliser un tel dispositif pratiquement ?
7. Que devient l'équation différentielle du mouvement de l'anneau ?
8. La position d'équilibre est-elle modifiée ?
9. Trouver la position de l'anneau à chaque instant $\rho(t)$, dans le cas où $\dfrac{\alpha}{m} = 2\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$.
10. Tracer $\rho(t)$.
11. Comment peut-on se servir de ce système pour mesurer une vitesse de rotation ?
12. Quel est l'intérêt de ce réglage ? Qu'observerait-on sinon ?