Département STPI
1ère année
1er semestre
UF Physique 1 (I1ANPH21)

Méthode générale de résolution

d'équations différentielles

B.Lassagne

I) Equation différentielle du premier ordre

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant du type :

$$\dot{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{b}y(\mathrm{t}) = \mathrm{A}$$

avec A constant.

La solution générale y(t) de cette équation différentielle est :

$$y(\mathrm{t}) = \mathrm{v}(t) + \mathrm{w}(t)$$

- *w(t)* est plus la solution particulière de l'équation $\dot{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{b}y(\mathrm{t}) = \mathrm{A}$.

- *v(t)* est la solution de l'équation homogène suivante :

$$\dot{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{b}y(\mathrm{t}) = 0$$

Méthode pour trouver la solution particulière w(t):

Comme les coefficients sont constants, on cherche une solution w(t) simple et indépendante du temps, du type $w(t) = w_0$. Sa dérivée est nulle, on a donc simplement :

$$\mathrm{b}w_0 = \mathrm{A} \Longrightarrow w_0 = \frac{\mathrm{A}}{b}$$

La solution v(t) est donnée par :

$$\mathrm{v}(\mathrm{t}) = \mathrm{c}e^{-bt}$$

La solution finale est donc donnée par :

$$y(\mathrm{t}) = \mathrm{v}(t) + \mathrm{w}(t) = \mathrm{c}e^{-bt} + \frac{\mathrm{A}}{b}$$

Le coefficient c se détermine grâce aux conditions initiales, $y(\mathrm{t} = 0) = y_0$.

Ainsi :

$$y(\mathrm{t} = 0) = \mathrm{c} + \frac{\mathrm{A}}{b} = y_0 \;\Rightarrow\; \mathrm{c} = y_0 - \frac{\mathrm{A}}{b}$$

Et :

$$y(\mathrm{t}) = y_0 e^{-bt} + \frac{\mathrm{A}}{b}(1 - e^{-bt})$$

II) Equation différentielle du second ordre

On s’intéresse aux équations du second ordre à coefficient constant du type :

$$\ddot{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{b}\dot{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{c}y(\mathrm{t}) = \mathrm{A}$$

avec A constant.

Comme pour les équations du premier ordre, la solution générale y(t) de cette équation différentielle est :

$$y(\mathrm{t}) = \mathrm{v}(t) + \mathrm{w}(t)$$

- *w(t)* est plus la solution particulière de l’équation $\ddot{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{b}\dot{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{c}y(\mathrm{t}) = \mathrm{A}$.

- *v(t)* est la solution de l’équation homogène suivante :

$$\ddot{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{b}\dot{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{c}y(\mathrm{t}) = 0$$

<u>Méthode pour trouver la solution particulière </u>w(t)<u>:</u>

Comme les coefficients sont constants, on cherche une solution w(t) simple indépendante du temps, du type $w(t) = w_0$. Ses dérivées successives sont toutes nulles donc on a simplement :

$$cw_0 = \mathrm{A} \Longrightarrow w_0 = \frac{\mathrm{A}}{c}$$

<u>La solution </u>v(t)<u> se calcule en résolvant l’équation caractéristique :</u>

$$\mathrm{r}^2 + \mathrm{br} + \mathrm{c} = 0$$

Les solutions dépendent du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4c$.

1) $\underline{\Delta > 0}$

$$r_1 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \; et \; r_2 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Alors

$$y(\mathrm{t}) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{\mathrm{A}}{c}$$

2) $\underline{\Delta = 0}$

$$r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2}$$

Alors

$$y(\mathrm{t}) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} + \frac{\mathrm{A}}{c}$$

3) $\underline{\Delta < 0}$

On pose $\Delta' = \mathrm{i}^2|\Delta|$

$$r_1 = -\frac{b}{2} + \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2} \; et \; r_2 = -\frac{b}{2} - \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

Les racines sont complexes conjuguées. On pose alors :

$$r_1 = r_2^* = \alpha + i\beta$$

Ainsi :

$$y(\mathrm{t}) = e^{\alpha t}\big(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)\big) + \frac{\mathrm{A}}{c} = Ke^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi) + \frac{\mathrm{A}}{c}$$

Rq : Il est aussi possible d'écrire la solution finale sous la forme :

$$y(t) = Ee^{\alpha t}e^{i\beta t} + Fe^{\alpha t}e^{-i\beta t} + \frac{\mathrm{A}}{c}$$

Les coefficients c_1 et c_2 (ou E et F) sont déterminés grâce aux conditions initiales sur $y(t)$ et $\dot{y}(t)$.