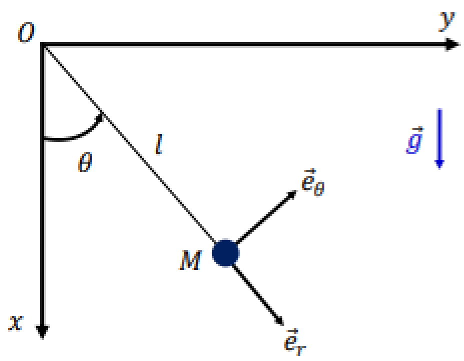
EXERCICE: PFD

On considère un pendule simple constitué d'un objet ponctuel M de masse m, accroché à un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. Son mouvement a lieu dans le plan vertical (xOy) du référentiel fixe $\Re(O, xyz)$.

On écarte le pendule d'un angle θ de sa position d'équilibre (θ = 0) et on le lâche sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont supposées inexistantes.

L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre g considéré comme uniforme.



1) Exprimer les forces appliquées au point M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

3) En appliquant le PFD dans le référentiel galiléen $\Re$:

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles oscillations.

b) Résoudre cette équation différentielle.

4) Etablir l'expression de la tension T du fil.

<u>RAPPEL :</u> Dans le repére $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$. , l'expression de $m\vec{\gamma}(M/\Re) = -ml\dot{\theta}^2\vec{e}_r + ml\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

CORRECTION :

1) Citer les forces s'appliquant sur le point matériel M dans le référentiel galiléen $\mathfrak{R}$.

Les forces appliquées au point M sont :

- Son poids $\vec{P}$ avec : $\vec{P} = m\vec{g} = mgcos\theta\,\vec{e}_r - mgsin\theta\,\vec{e}_\theta$
- La tension du fil $\vec{T}$ avec : $\vec{T} = -T\vec{e}_r$

2) Ecrire le PFD appliqué au point M dans $\mathfrak{R}$.

Le PFD dans ce référentiel galiléen est le suivant:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$$

$$\Rightarrow \qquad m\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = \vec{P} + \vec{T}$$

$$\Rightarrow \quad -ml\dot{\theta}^2\vec{e}_r + ml\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = (mgcos\theta - T)\vec{e}_r - mgsin\theta\,\vec{e}_\theta$$

3) a) En projetant le PFD sur $\vec{e}_\theta$, établir l'équation du mouvement pour de faibles oscillations.

La projection du PFD sur $\vec{e}_\theta$ donne :

$$ml\ddot{\theta} = -mgsin\theta$$

$$\Rightarrow \quad ml\ddot{\theta} + mgsin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

Pour des faibles oscillations, $sin\theta \cong \theta \quad (\theta\ très\ petit)$

On trouve finalement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

b) En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 du mouvement.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

4) En projetant le PFD sur $\vec{e}_r$, établir l'expression de la tension T du fil.

La projection du PFD sur $\vec{e}_r$ donne :

$$-ml\dot{\theta}^2 = mgcos\theta - T$$

$$\Rightarrow \qquad T = mgcos\theta + ml\dot{\theta}^2$$