

Durée : 1h30

Aucun document autorisé. Calculatrice non autorisée. Formulaire en dernière page.

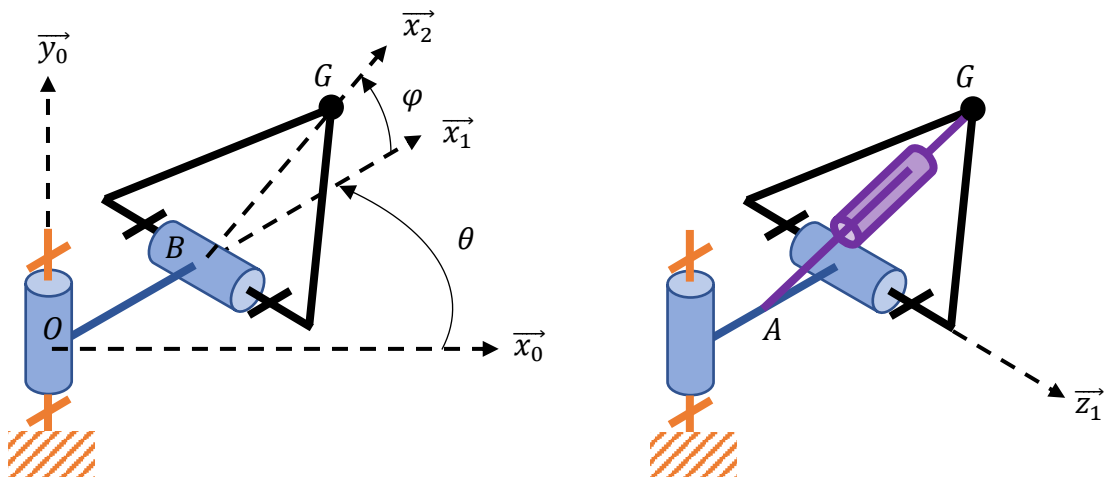
Une attention particulière sera portée à **l'homogénéité des résultats** (cohérence des unités).

Crocodile de La Roche sur Yon

Dans ce sujet, nous étudierons un crocodile qui fait partie des animaux mécaniques imaginés par la compagnie La Machine pour la mairie de La Roche sur Yon. Elles sont installées sur une place et les promeneurs peuvent actionner les mécanismes grâce à des manettes et leviers disposés aux alentours.



Les structures sont actionnées par des vérins pneumatiques et on cherche à dimensionner le vérin qui actionne la tête du crocodile pour permettre un mouvement de haut en bas. Ce mouvement a lieu en même temps qu'un mouvement de droite à gauche actionné par un autre vérin qui ne fait pas partie de notre étude.



On suppose que le corps du crocodile est immobile pendant la phase étudiée.

Le mécanisme peut alors être modélisé par trois solides :

- Le corps (0) qui correspond au bâti (référentiel Galiléen)
- Le cou (1) qui fait le lien entre la tête et le corps
- La tête (2) de masse m et de centre de gravité G
- On fait l'hypothèse que la tête (2) présente 2 plans de symétrie : $\vec{x}_2 G \vec{y}_2$ et $\vec{x}_2 G \vec{z}_2$

Les liaisons entre les solides sont :

- Un pivot d'axe $O \vec{y}_0$ entre (0) et (1) de paramètre θ
- Un pivot d'axe $B \vec{z}_1$ entre (1) et (2) de paramètre φ

Le vérin à dimensionner :

- Est placé entre les solides (1) et (2)
- Est monté avec une rotule en G et une rotule en A
- Exerce une force notée F_{12} dans la direction AG (au niveau des liaisons en A et G)
- Présente une masse et une inertie négligeable

On donne le paramétrage suivant :

- $\overrightarrow{OB} = L\overrightarrow{x_1}$
- $\overrightarrow{BG} = d\overrightarrow{x_2}$
- $\overrightarrow{OA} = h\overrightarrow{x_1}$

- 1) Effectuer un graphe d'analyse du mécanisme en indiquant :
 - a. Les liaisons
 - b. Les actions mécaniques supplémentaires
 - c. Les paramètres cinématiques des liaisons
- 2) Donner la forme de la matrice d'inertie du solide (2) au point G dans la base 2
- 3) Calculer la résultante cinétique du solide 2 dans la base 2
- 4) Calculer la résultante dynamique dans la base 2
- 5) Calculer le moment cinétique en G en utilisant la matrice d'inertie de la question 2
- 6) Simplifier l'expression du moment cinétique en G en considérant que les moments d'inertie selon les axes $G\overrightarrow{x_2}$ et $G\overrightarrow{y_2}$ sont nuls
- 7) Pour déterminer l'effort que doit exercer le vérin, on isole le solide 2 et on pose le théorème du moment dynamique au point B projeté sur l'axe $\overrightarrow{z_1}$:
 - a. Calculer le torseur dynamique du solide (2) au point B à partir du résultat de la question 6
 - b. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures sur 2 et écrire leur moment en B
 - c. Déterminer la valeur de F_{12}
- 8) Expliquer la démarche
 - a. Pourquoi peut-on affirmer que l'effort du vérin est dans la direction AG ?
 - b. Expliquer le choix de l'isolement, de l'équation et du point de l'étude.

Formulaire

Torseur en un point A :

$$[T]_{A,B} = \left[\begin{array}{c} \vec{R} = \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \\ \vec{M}_A = \begin{array}{c} L \\ M \\ N \end{array} \end{array} \right]_{\mathcal{B}} \quad \text{avec} \quad \vec{M}_{A[T]} = \vec{M}_{B[T]} + A\vec{B} \wedge \vec{R}_{[T]}$$

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$[C_{S/\mathcal{R}}] = [\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad , \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}]_A \quad \text{avec} \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B \in S/\mathcal{R})} + A\vec{B} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}_{(A \in S_2 / S_0)} = \vec{V}_{(A \in S_2 / S_1)} + \vec{V}_{(A \in S_1 / S_0)}$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$[F_{Ext/S}]_A = [D(S/\mathcal{R})]_A \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{[F_{Ext/S}]} = m \vec{\Gamma}_{(G \in S/\mathcal{R})} \\ \vec{M}_{A[F_{Ext/S}]} = \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \left(\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) \right)_{\mathcal{R}} + m \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})}$$

où :

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = [I_{A,B}(S)] \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m A\vec{G} \wedge \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \quad \text{avec} \quad A \in S$$

et

$$[I_{A,B}(S)] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ \int_S (z^2 + x^2) dm & -\int_S yz dm & \\ & \int_S (x^2 + y^2) dm & \end{bmatrix}$$

Théorème de Huygens

$$[I_{A,B}(S)] = [I_{G,B}(S)] + [I_{A,B}(G,m(S))]$$

Puissance développée

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = [\vec{R}_{[F_{Ext/S}]} \quad \vec{M}_{A[F_{Ext/S}]}]_A \otimes [\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}]_A$$

Energie cinétique

$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})}^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot ([I_{G,\cdot}(S)] \cdot \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}), \text{ si } A \text{ est fixe, } \mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot ([I_A(S)] \cdot \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}})$$

$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} [\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad \vec{V}_{P \in S/\mathcal{R}}]_P \otimes [\vec{Rc}(S/\mathcal{R}) \quad \vec{\sigma}_P(S/\mathcal{R})]_P \text{ pour un point quelconque}$$

Théorème de l'Energie Cinétique

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{Ext \dot{a} S/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{Int \dot{a} S/\mathcal{R}}$$