

Le système étudié ici est destiné à effectuer des tests dynamiques et statiques sur des équipements inertiels (tels que gyroscopes, accéléromètres, calculateurs...). Ces équipements, embarqués dans tout type de véhicules (terrestres, marins, aériens et spatiaux) permettent à un engin mobile de connaître en temps réel sa position et sa vitesse dans l'espace.

Ce testeur est composé de plusieurs parties (Figure 1) :

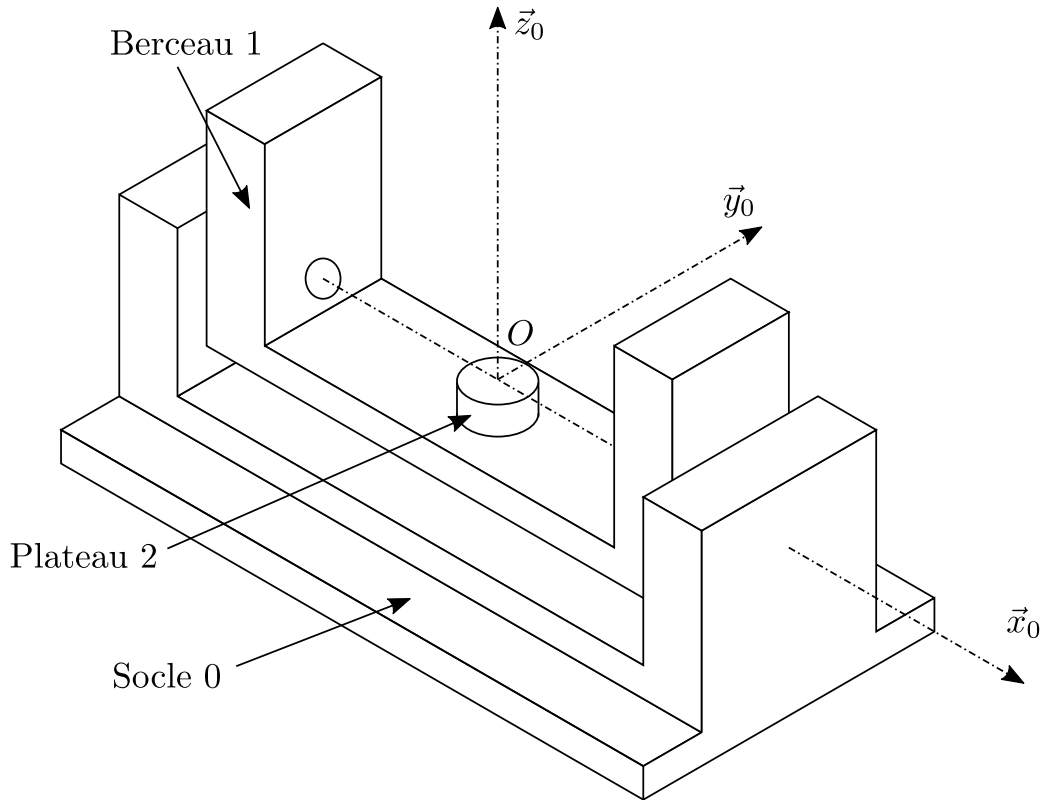


FIGURE 1 – Testeur de centrale inertielle

- un socle 0 lié à un repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ considéré comme galiléen (fixe)
- un berceau 1 lié à un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
 - il est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$ par rapport au socle 0
 - le paramètre de rotation associé est θ
- un plateau 2 lié à un repère $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
 - il est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_1)$ par rapport au berceau 1
 - le paramètre de rotation associé est ϕ
- une centrale inertielle 3 (non représentée), est fixée sur le plateau 2

Le schéma cinématique de l'ensemble est donné dans la figure ci-dessous (Figure 2)

- Le berceau 1 a une masse m_1
- Son centre de gravité G_1 est tel que $OG_1 = h_1 \vec{z}_1$
- La matrice d'inertie du solide 1 au point G_1 et dans la base 1 est :

$$[I_{G_1,1}(1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{G_1,1}$$

- Le centre de gravité G_S de l'ensemble $S = \{2 + 3\}$ est positionné sur l'axe Oz_1 : $O\vec{G}_S = h_s \vec{z}_1$
- L'ensemble $\{2 + 3\}$ peut être modélisé par un solide de révolution
- La masse de $\{2 + 3\}$ est notée m_S
- Sa matrice d'inertie au point G_S et dans la base 2 est :

$$[I_{G_S,2}(S)] = \begin{bmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_s & 0 \\ 0 & 0 & C_s \end{bmatrix}_{G_S,2}$$

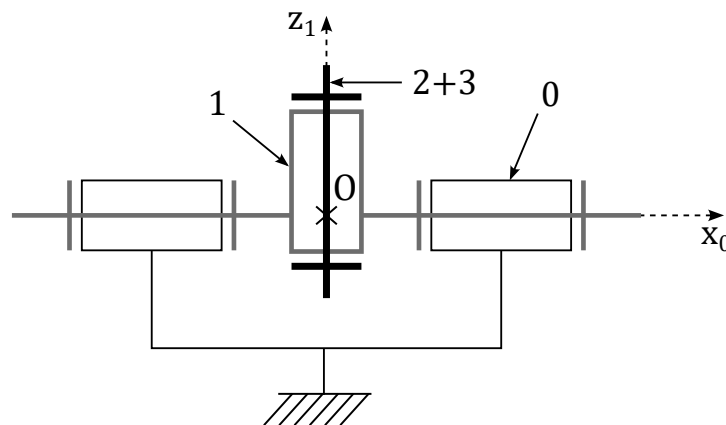


FIGURE 2 – Schéma cinématique

Question 1. Éléments préliminaires

1. Établir le graphe des liaisons
2. Établir les figures de changement de base explicitant le positionnement angulaire :
 - du repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
 - du repère $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ par rapport au repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
3. Donner l'expression des vecteurs rotation $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{S/1}$ et $\vec{\Omega}_{S/0}$. Donner le dernier résultat dans la base 1.
4. Justifier la forme de la matrice $[I_{0,1}(1)]$.
5. Justifier la forme de la matrice $[I_{0,2}(S)]$.
6. Justifier le fait que cette matrice s'écrit de la même façon dans la base 1.

Question 2. Dynamique de 1/0

1. Calculer dans une base de votre choix le torseur cinématique au point O de 1 par rapport à 0.
2. Calculer dans la base 1 le torseur cinétique au point G_1 de 1 par rapport à 0.
3. Calculer dans la base 1 le torseur dynamique au point O de 1 par rapport à 0.

Question 3. Dynamique de S/0

1. Calculer dans une base de votre choix le torseur cinématique au point O de l'ensemble S dans son mouvement par rapport au repère 0.
2. Calculer dans la base 1 le torseur cinétique au point G_s de l'ensemble S dans son mouvement par rapport au repère 0.
3. Calculer dans la base 1 le torseur dynamique au point O de l'ensemble S dans son mouvement par rapport au repère 0.

Formulaire

Dérivation vectorielle (vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}_k$) :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_0 = \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_k + \vec{\Omega}(k/0) \wedge \vec{u}$$

Composition des vitesses :

$$\vec{V}_P(2/0) = \vec{V}_P(2/1) + \vec{V}_P(1/0)$$

Répartition des masses :

$$[I_{(P, \mathcal{B}_1)}(S)] + [I_{(G, \mathcal{B}_1)}(S)] + m \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

Moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = [I_{(G, \cdot)}(S)] \vec{\Omega}(S/R) \quad \text{au centre d'inertie G du solide S}$$

$$\vec{\sigma}_P(S/R) = [I_{(P, \cdot)}(S)] \vec{\Omega}(S/R) + m \vec{PG} \wedge \vec{V}_P(S/R) \quad \text{en un point P quelconque du solide S}$$

Moment dynamique :

$$\vec{\delta}_G(S/R) = \frac{d\vec{\sigma}_G(S/R)}{dt} \Big|_R \quad \text{au centre d'inertie G du solide S}$$

$$\vec{\delta}_G(S/R) = \frac{d\vec{\sigma}_P(S/R)}{dt} \Big|_R + m \vec{V}_P(S/R) \wedge \vec{V}_G(S/R) \quad \text{en un point P quelconque du solide S}$$

Changement de point du moment (règle de BABAR) applicable **pour tous les torseurs** :

$$\text{Moment au point B} = \text{Moment au point A} + \vec{BA} \wedge \text{Résultante}$$

Torseurs utiles :

$$\text{Torseur cinématique} : \begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}_P(S/R) \end{bmatrix}_P$$

$$\text{Torseur cinétique} : \begin{bmatrix} \vec{R}_c(S/R) \\ \vec{\sigma}_P(S/R) \end{bmatrix}_P$$

$$\text{Torseur dynamique} : \begin{bmatrix} \vec{R}_d(S/R) \\ \vec{\delta}_P(S/R) \end{bmatrix}_P$$

$$\text{Torseur des efforts} : \begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_P(F) \end{bmatrix}_P$$

Principe fondamentale de la dynamique (PFD) :

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{R}_d(S_i/R) \\ \sum \vec{M}_P(F_{ext}) = \sum_i \vec{\delta}_P(S_i/R) \end{cases}$$