

Durée de l'épreuve 2h30 (3h20 avec TT)

On étudie ici le véhicule auto-balancé Segway (Figure 1). Le Segway est un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. La conduite du Segway se fait par inclinaison du corps vers l'avant ou vers l'arrière, afin d'accélérer ou freiner le mouvement. La spécificité de ce véhicule est d'avoir deux roues qui ont le même axe de rotation. Le système comporte un dispositif d'asservissement d'inclinaison qui, en jouant sur les deux moteurs électriques équipant les deux roues, maintient la plate-forme du véhicule à l'horizontale (et la barre d'appui à la verticale). L'objectif de cette étude est de vérifier la stabilité en virage (Partie 1) et de dimensionner la motorisation en ligne droite (Partie 2).



FIGURE 1 – Segway

Le système étudié ici est composé de plusieurs parties (Figure 2) :

1. La route 0 est liée au repère  $R_0(O, B_0)$  où  $B_0$  est la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .  
—  $R_0$  est considéré fixe pour notre étude.
2. Deux roues  $r_D$  et  $r_G$  sont en contact ponctuel avec la route 0 aux points  $I_D$  et  $I_G$  situés sur l'axe  $O\vec{x}_1$ .  
— Les liaisons ponctuelles roue/sol présentent des frottements.  
— On notera  $f$  le coefficient de frottement associé au contact ponctuel roue/sol.  
— La roue  $r_D$  est en liaison pivot **motorisée** d'axe  $O_D\vec{x}_1$  et de paramètre  $\theta_D$  avec une plateforme 1.  
— Le couple exercé sur la roue  $r_D$  par le stator d'un moteur solidaire de 1 est noté  $C_D$ .  
— La roue  $r_G$  est en liaison pivot **motorisée** d'axe  $O_G\vec{x}_1$  et de paramètre  $\theta_G$  avec la plateforme 1.  
— Le couple exercé sur la roue  $r_G$  par le stator d'un moteur solidaire de 1 est noté  $C_G$ .
3. Une base  $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est obtenue à partir de  $B_0$  par rotation d'un angle  $\varphi$  et d'axe  $O\vec{z}_0 = O\vec{z}_1$ .  
— La vitesse de rotation  $\dot{\varphi}$  est **constante**.
4. La plateforme 1 est en **rotation** autour de l'axe  $O\vec{z}_1$  et elle est donc liée au repère  $R_1(A, B_1)$ .  
— Pour la sécurité du passager, l'axe  $\vec{z}_1$  doit rester vertical (plateforme à plat).  
— Elle a pour centre de gravité le point  $A$  situé au milieu des points  $O_G$  et  $O_D$ .  
— On notera  $m_1$  la masse de la plateforme 1.  
— Pour simplifier, on suppose qu'elle présente une symétrie droite/gauche et une symétrie avant/arrière.
5. Une base  $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est obtenue à partir de  $B_1$  par rotation d'un angle  $\alpha$  et d'axe  $A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2$ .  
— L'angle  $\alpha$  est **constant**.
6. Un conducteur 2 est situé sur la plateforme 1.  
— Le conducteur est lié au repère  $R_2(A, B_2)$ .  
— Il est donc **fixe** dans le temps par rapport à la plateforme 1.  
— Son centre de gravité est noté  $G$  et est que  $\vec{AG} = d\vec{x}_2 + h\vec{z}_2$ .  
— On notera  $m_2$  sa masse.

La pesanteur est dirigée selon  $-\vec{z}_0$ .

Les autres paramètres géométriques sont les suivants :

- Les roues sont de rayon  $r$ .
- On a  $\overrightarrow{O_D A} = \overrightarrow{A O_G} = L \vec{x}_1$  et  $\overrightarrow{O A} = R \vec{x}_1 + r \vec{z}_1$ .

On note

$$[\mathcal{T}(0 \rightarrow r_D)]_{I_D} = \begin{bmatrix} X_D \vec{x}_1 + Y_D \vec{y}_1 + Z_D \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{bmatrix}_{I_D}$$

le torseur en  $I_D$  et dans la base  $B_1$  des actions de liaison avec frottement du sol sur la roue  $r_D$ .

On note

$$[\mathcal{T}(0 \rightarrow r_G)]_{I_G} = \begin{bmatrix} X_G \vec{x}_1 + Y_G \vec{y}_1 + Z_G \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{bmatrix}_{I_G}$$

le torseur en  $I_G$  et dans la base  $B_1$  des actions de liaison avec frottement du sol sur la roue  $r_G$ .

On note

$$[I_{(A, B_1)}(1)] = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{A, B_1}$$

la matrice d'inertie du solide 1 au point  $A$  et dans la base 1.

On note

$$[I_{(G, B_2)}(2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & -E_2 \\ 0 & B_2 & 0 \\ -E_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{G, B_2}$$

La matrice d'inertie du solide 2 au point  $G$  et dans la base 2.

Les effets de masse et d'inertie des deux roues sont négligés.

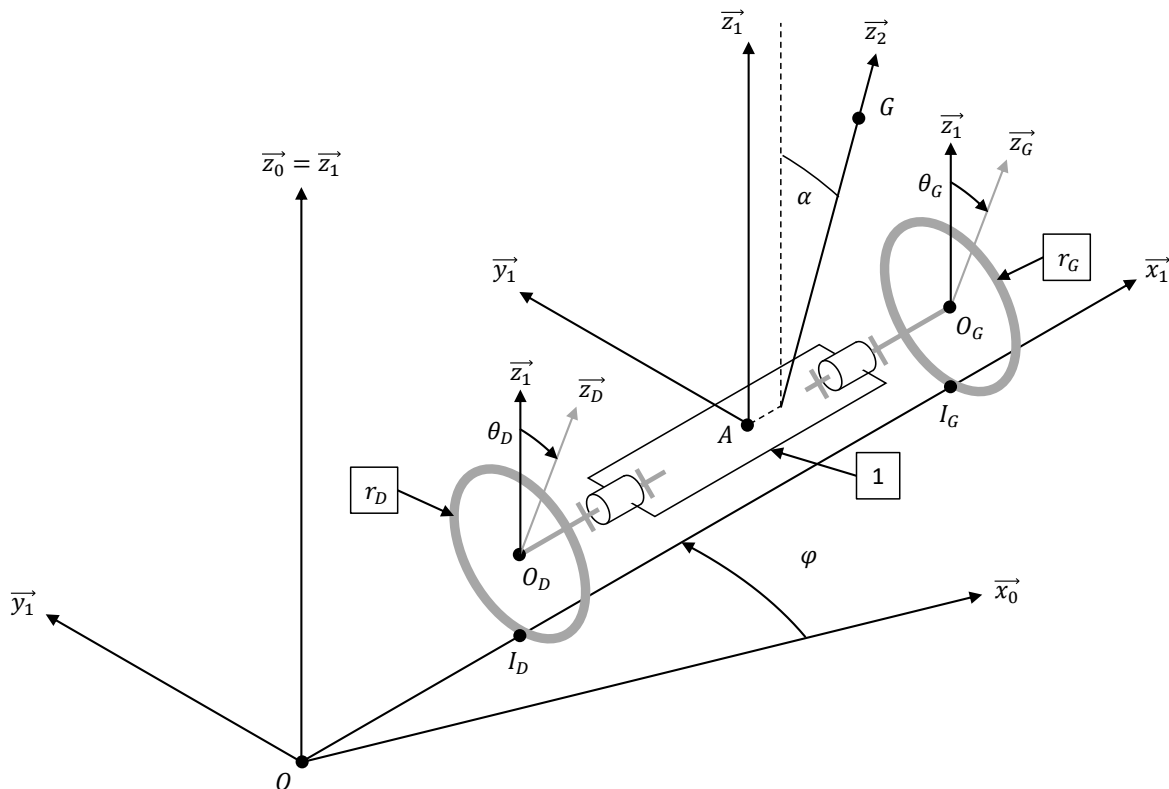


FIGURE 2 – Schéma cinématique

Une attention particulière sera portée aux unités : tout résultat dont les unités ne sont pas cohérentes retirera des points à la question.

## 1 Partie 1 : dynamique du virage

Dans cette partie, on souhaite écrire les conditions de stabilité du Segway lors d'un virage.

### Question 1. Graphe et cinématique

1. Établir le graphe des liaisons et des efforts extérieurs. (Ajouter le bilan des inconnues de liaison si cela vous aide pour la suite.)
2. Établir les figures de changement de base.
3. Écrire le torseur cinématique de la plateforme 1 au point A dans son mouvement par rapport au sol 0.
4. Écrire le torseur cinématique de la roue  $r_D$  au point  $O_D$  dans son mouvement par rapport au sol 0. Écrire le torseur cinématique de la roue  $r_G$  au point  $O_G$  dans son mouvement par rapport au sol 0.
5. On rappelle que le conducteur est fixe par rapport à la plateforme. Écrire le torseur cinématique du conducteur 2 au point G dans son mouvement par rapport au sol 0 dans la base  $B_1$ .
6. Écrire les deux équations scalaires correspondant au roulement sans glissement en  $I_D$  et  $I_G$  (pour trouver des relations entre la vitesse de rotation du Segway  $\dot{\varphi}$  et les vitesses de rotations des roues  $\dot{\theta}_D$  et  $\dot{\theta}_G$ ).

### Question 2. Dynamique

1. Justifier les simplifications qu'on peut apporter à la matrice  $[I_{(A,B_1)}(1)]$ . Pour la suite des calculs, on utilisera la matrice simplifiée.
2. On souhaite déterminer les actions de liaison en  $I_G$  et  $I_D$  pour un mouvement connu. Justifier le système à isoler.
3. Faire le bilan des efforts extérieurs sur l'isolement choisi.
4. Écrire le torseur dynamique en A de 1 dans son mouvement par rapport à 0.
5. Écrire le torseur cinétique en G de 2 dans son mouvement par rapport à 0 dans la base  $B_1$ .
6. Écrire le torseur dynamique en G de 2 dans son mouvement par rapport à 0.

Note : Pour simplifier la notation, dans la suite du sujet on notera le torseur dynamique de 2/0 en G dans  $B_1$  :

$$\{D_G(2/0)\} = \begin{bmatrix} Rdx_2 \cdot \vec{x}_1 + Rdy_2 \cdot \vec{y}_1 \\ \delta x_2 \cdot \vec{x}_1 + \delta y_2 \cdot \vec{y}_1 \end{bmatrix}_G$$

7. On rappelle qu'on cherche à déterminer les inconnues de liaison en  $I_G$  et  $I_D$ . Justifier le point le plus judicieux pour écrire le PFD.
8. Écrire les équations scalaires correspondant au PFD pour le système S choisi au point choisi. (On ne demande **pas** de résoudre ce système d'équations).
9. Est-il possible de résoudre le système d'équations en l'état ?

Lorsque le Segway effectue un virage, il faut vérifier pour des raisons de sécurité qu'il n'y a pas de risque de glissement ni de décollement des roues du véhicule. Dans la partie suivante, on cherche à écrire ces conditions **sans résoudre le système**.

### Question 3. Conditions de glissement et basculement

1. Écrire les conditions d'adhérence en  $I_D$  et  $I_G$ .
2. Expliquer sans résoudre quelle est la roue qui vous semble risquer le plus de glisser.
3. Si on se place à la limite du glissement, peut-on résoudre le système écrit à la question 2.8 ?
4. On souhaite éviter un décollement des roues en virage. Justifier quelle(s) condition(s) il faut écrire ?

## 2 Partie 2 : mouvement en ligne droite

Dans cette partie, on suppose que le Segway se déplace :

- en **ligne droite**, à une vitesse  $\dot{y}$  variable,
- ce qui revient à écrire :  $\varphi = 0 = cst$ ,
- sur une pente inclinée d'un angle  $\beta$  par rapport à l'horizontale (Figure 3).

Les deux roues  $r_D$  et  $r_G$  présentent donc la même vitesse de rotation, et on alors peut considérer que le système est constitué de :

1. Un essieu regroupant l'ensemble des deux roues qui sera noté 4.
  - La vitesse angulaire des deux roues par rapport à la plateforme 1 est notée  $\dot{\theta}$ .
  - Le contact roues/sol est modélisé par une ponctuelle avec frottement au point  $I_4$ .
  - Les roues roulent sans glisser sur le sol.
  - Les effets de masse et d'inertie de ces deux roues **ne sont pas** négligés.
  - La masse de **chaque** roue est notée  $m_r$ . Le centre de gravité de l'essieu est  $O_4$ .
  - Le moment d'inertie de **chaque** roue selon l'axe  $\vec{O}_4x_1$  (axe principal d'inertie) est noté  $I_r$ .
  - Les deux roues 4 sont considérées en pivot motorisé au point  $O_4$  par rapport à la plateforme 1.
  - Dans cette partie, le couple exercé par la plateforme 1 sur les roues 4 est noté  $C_M = C_D + C_G$ .
2. La plateforme 1 de masse  $m_1$  ne s'incline pas.
3. Le conducteur 2 de masse  $m_2$  en  $G$  s'incline d'un angle  $\alpha$  **constant**.

Note 1 : La position du point  $I_4$  est repérée par le paramètre  $y$ .

Note 2 : Le problème est un problème **plan**.

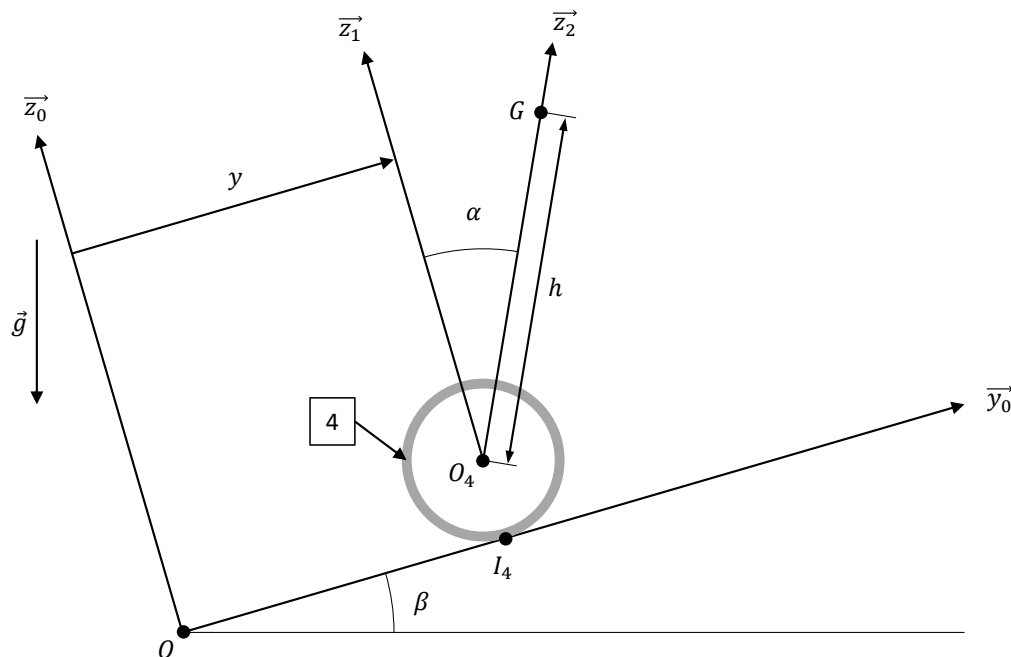


FIGURE 3 – Schéma cinématique - déplacement en ligne droite

On désire pré-dimensionner la motorisation du véhicule : il faut alors déterminer le couple  $C_M$  exercé par la plateforme 1 sur les roues 4.

**Question 4. Énergétique**

1. Comment s'écrit la relation de roulement sans glissement en  $I_4$  (points  $I_D$  et  $I_G$  confondus) ?
2. Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble du système  $S = \{4, 1, 2\}$  en fonction de  $\dot{\theta}$ .
3. Calculer la puissance des efforts extérieurs sur  $S$ .
4. Calculer la puissance des efforts intérieurs à  $S$ .
5. Déterminer le couple moteur  $C_M$  en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.
6. Que donne le couple si le véhicule se déplace à une vitesse constante  $\dot{y} = v = \text{cst}$  ?
7. Justifier le signe du couple moteur obtenu aux deux questions précédentes.

**Formulaire**

**Dérivation vectorielle** (d'un vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}_k$ ) :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_0 = \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_k + \vec{\Omega}(k/0) \wedge \vec{u}$$

**Composition des vitesses** :

$$\vec{V}_P(2/0) = \vec{V}_P(2/1) + \vec{V}_P(1/0)$$

**Répartition des masses** :

$$[I_{(P, \mathcal{B}_1)}(S)] = [I_{(G, \mathcal{B}_1)}(S)] + m \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}_{P, \mathcal{B}_1}$$

où  $x, y$  et  $z$  sont les coordonnées du vecteur  $\vec{PG}$  dans la base  $\mathcal{B}_1$

**Moment cinétique** :

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = [I_{(G, \mathcal{B})}(S)] \vec{\Omega}(S/R) \quad \text{au centre d'inertie G du solide S}$$

$$\vec{\sigma}_P(S/R) = [I_{(P, \mathcal{B})}(S)] \vec{\Omega}(S/R) + m \vec{PG} \wedge \vec{V}_P(S/R) \quad \text{en un point P quelconque du solide S}$$

Dans ces deux formules, le point signifie que les matrices seront écrites dans la base la plus appropriée.

**Moment dynamique** :

$$\vec{\delta}_G(S/R) = \frac{d\vec{\sigma}_G(S/R)}{dt} \Big|_R \quad \text{au centre d'inertie G du solide S}$$

$$\vec{\delta}_P(S/R) = \frac{d\vec{\sigma}_P(S/R)}{dt} \Big|_R + m \vec{V}(P/R) \wedge \vec{V}_G(S/R) \quad \text{en un point P quelconque du solide S}$$

**Changement de point du moment** (règle de BABAR) applicable **pour tous les torseurs** :

$$\text{Moment au point B} = \text{Moment au point A} + \vec{BA} \wedge \text{Résultante}$$

**Torseurs utiles :**

Torseur cinématique :  $\begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}_P(S/R) \end{bmatrix}_P$

Torseur cinétique :  $\begin{bmatrix} \vec{R}_c(S/R) \\ \vec{\sigma}_P(S/R) \end{bmatrix}_P$

Torseur dynamique :  $\begin{bmatrix} \vec{R}_d(S/R) \\ \vec{\delta}_P(S/R) \end{bmatrix}_P$

Torseur des efforts :  $\begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_P(F) \end{bmatrix}_P$

**Principe fondamental de la dynamique (PFD) :**

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{R}_d(S_i/R) \\ \sum \vec{M}_P(F_{ext}) = \sum_i \vec{\delta}_P(S_i/R) \end{cases}$$

**Énergie cinétique :**

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \{ m \vec{V}_G(S/R)^2 + \vec{\Omega}(S/R) \cdot [I_{(G,B)}(S)] \vec{\Omega}(S/R) \}$$

**Puissance :**

La puissance est donnée par le comoment entre le torseur des efforts et le torseur cinématique.

**Théorème de l'énergie cinétique :**

$$\frac{d}{dt} E_c(S/R) = P_{ext/S} + P_{int S}$$