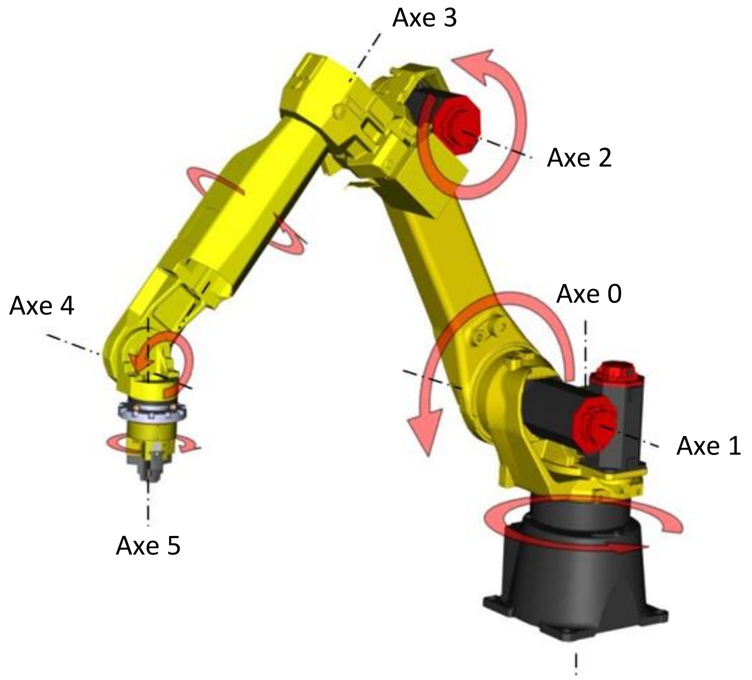
Nom : **Prénom :**

Durée de l'épreuve : 2h30 (3h20 avec TT)
Aucun document autorisé. Calculatrice non autorisée. Formulaire en dernière page.
Une attention particulière sera portée à **<u>l'homogénéité des résultats</u>** (cohérence des unités).
<u>Lire le sujet jusqu'au bout avant de commencer</u>, il y a des indices et des précisions.
Les deux parties peuvent être abordées de façon indépendante.
Le barème est proposé à titre **<u>indicatif</u>** et susceptible de changer.

BRAS ROBOT FANUC M20iA



L'entreprise MTC spécialisée dans le conditionnement est équipée d'un robot industriel FANUC de série M20i A. Ce robot 6 axes est particulièrement adapté à des opérations de manutention et de prise et dépose de pièces de formes et de dimensions variées. L'outil préhenseur doit cependant pouvoir être changé pour s'adapter à la géométrie des pièces.

Cette opération doit s'effectuer le plus rapidement possible ce qui induit des effets dynamiques importants. On cherche à caractériser l'impact de ces effets dynamiques sur le dimensionnement des roulements assurant le guidage en rotation des différentes parties du bras.

Objectif de l'étude

L'axe 1 de rotation du robot comprend un ensemble de deux roulements qui permettent de guider le mouvement de rotation entre les deux parties associées. Il est nécessaire pour dimensionner ces roulements de connaitre les efforts auxquels ils sont soumis lors des différentes phases d'utilisation du robot.

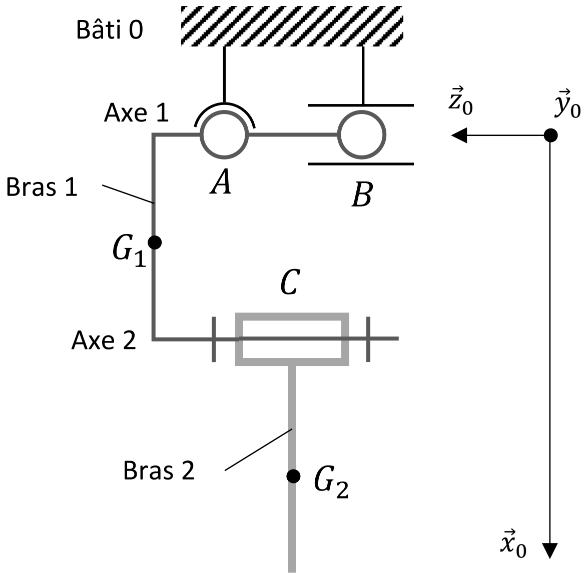
On s'intéresse pour cette étude à une partie du mouvement de retour à vide du bras pour effectuer un changement d'outil. Lors de cette phase, les axes 0, 3, 4 et 5 sont immobiles et seuls les axes 1 et 2 sont en mouvement.

Modélisation du bras durant la phase étudiée

Durant la phase étudiée, on peut assimiler le robot à 2 solides :

- Le bras 1 est de masse m_1
- Il est en liaison rotule et linéaire annulaire avec le bâti *(ces liaisons représentent des roulements à billes)*
- La rotation de 1 est assurée par un moteur fournissant un couple C_{m1} autour de l'axe 1
- On fait l'hypothèse simplificatrice que le solide 1 présente un axe de révolution : $G_1\overrightarrow{x_1}$

- Le bras 2 est de masse m_2 *(il correspond au reste du robot)*
- Il est en liaison pivot avec le bras 1 *(réalisée par des coussinets)*
- La rotation de 2 est assurée par un moteur fournissant un couple C_{m2} autour de l'axe 2
- On fait l'hypothèse que le solide 2 présente 2 plans de symétrie : $\overrightarrow{x_2}G_2\overrightarrow{y_2}$ et $\overrightarrow{z_2}G_2\overrightarrow{y_2}$



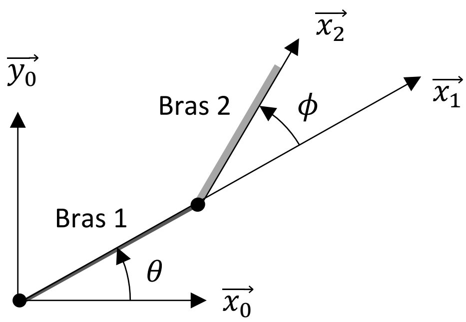
La géométrie est décrite par le paramétrage suivant :

$$\overrightarrow{AG_1} = a\overrightarrow{z_0} + l_1\overrightarrow{x_1} \qquad \overrightarrow{AG_2} = d\overrightarrow{z_0} + L\overrightarrow{x_1} + l_2\overrightarrow{x_2}$$

$$\overrightarrow{BG_1} = b\overrightarrow{z_0} + l_1\overrightarrow{x_1} \qquad \overrightarrow{BG_2} = f\overrightarrow{z_0} + L\overrightarrow{x_1} + l_2\overrightarrow{x_2}$$

La gravité est telle que $\vec{g} = -g\overrightarrow{y_0}$

Les rotations autour de l'axe 1 et de l'axe 2 sont paramétrées de la façon suivante :



θ, ϕ et leurs dérivées sont variables au cours du temps

On considère que le mouvement est tel que : $\dot{\theta} = \dot{\phi}$ à chaque instant

On connait le mouvement que l'on souhaite obtenir ($\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}$ sont connus)

Partie 1 : dynamique

Q1. (1 pt) Justifier la forme des matrices d'inertie $[I_{G1}]$ du bras 1 dans la base $\mathcal{B}_1$ et $[I_{G2}]$ du bras 2 dans $\mathcal{B}_2$

Q2. (1 pt) Effectuer un graphe d'analyse (liaisons et efforts extérieurs) du robot dans la phase étudiée

Q3. (2 pt) **Justifier** précisément les **isolements** et les **équations** qu'il faudrait utiliser pour déterminer :

a. Les efforts dans les liaisons en A et en B (rotule et linéaire annulaire)

b. Les efforts dans la liaison pivot en C

Q4. On cherche les efforts dans les liaisons en A et en B (rotule et linéaire annulaire)

Note : - il n'est **pas nécessaire de trouver le couple moteur**, c'est l'objectif de la partie suivante.

- Certains calculs prévus à la question c peuvent aussi être faits dans les parties a ou b. En fonction de l'ordre des calculs, les points du barème de la question c seront redistribués aux questions a et b.

a. (4 pt) Pour chaque isolement, déterminer les torseurs dynamiques nécessaires
Note : vous n'êtes **pas obligés de calculer** les composantes des torseurs inutiles à notre objectif

b. (2 pt) Pour chaque isolement, effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures

c. (3 pt) Ecrire les équations du principe fondamental de la dynamique **nécessaires** à la résolution
Note : - les équations du PFD seront données dans la **base 1**
- on ne résoudra pas les équations du PFD
- vous n'êtes **pas obligés d'écrire** les équations inutiles à notre objectif
- Si nécessaire, on écrira $\vec{a}_{G2\in 2/0} = \gamma_X \overrightarrow{x_1} + \gamma_Y \overrightarrow{y_1} + \gamma_Z \overrightarrow{z_1}$ en détaillant l'expression littérale de γ_X, γ_Y et γ_Z. Pour la suite des calculs, **les résultats pourront être exprimés en fonction de $\boldsymbol{\gamma_X, \gamma_Y}$ et $\boldsymbol{\gamma_Z}$.**

Q5. (1 pt) **<u>BONUS</u> :** quelles sont les dimensions des deux éléments du torseur dynamique $\overrightarrow{R_d}(S/\mathcal{R})$ et $\overrightarrow{\delta_P}(S/\mathcal{R})$ dans les unités de base du système international (pas de Newtons) ?

Q6. (2 pt) **<u>BONUS</u> (à faire après tout le reste, ne perdez pas de temps) :** quelle serait la stratégie pour trouver les efforts de liaison en A et B si le moteur de l'axe 1 était remplacé par un vérin ? Quelles hypothèses faudrait-il faire pour que cette stratégie soit viable ?

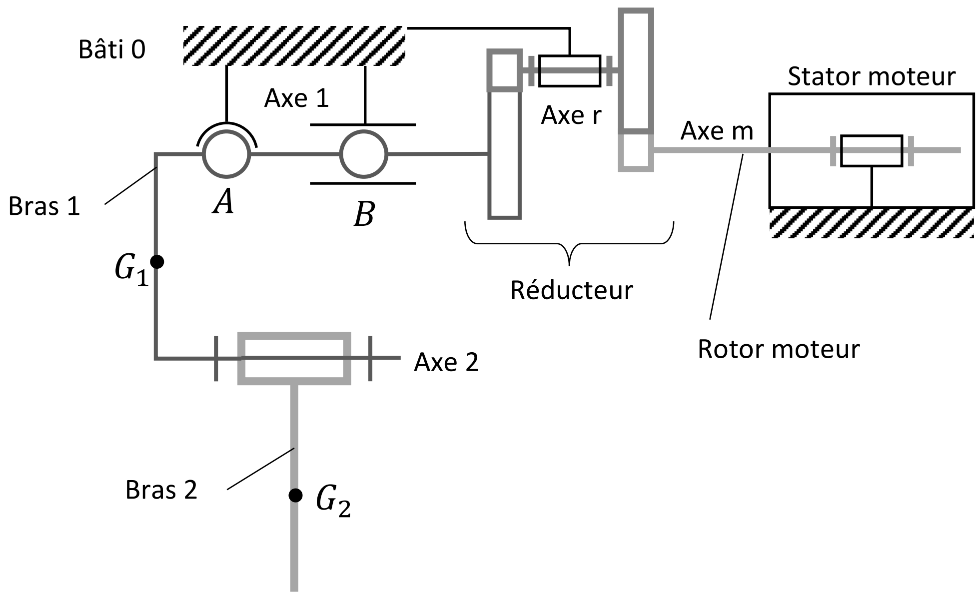
Note : il ne faut faire **aucun calcul** à cette question.

Partie 2 : étude énergétique de la motorisation

On cherche à déterminer le couple maximal que doit exercer le moteur durant la phase de changement d'outil. Le bras est entrainé par l'intermédiaire d'un moteur et d'un réducteur, connectés comme détaillé ci-dessous.

Hypothèses et notations :

- **Pour cette partie uniquement**, le mouvement est tel que : $\phi = cst = 0$ (les bras sont alignés, seul l'axe 1 tourne)
- Le rotor du moteur (mobile) et le stator du moteur (solidaire du bâti) sont reliés par une liaison pivot
- Le rapport de vitesse entre le moteur et l'axe r est tel que : $\omega_m = -u_1\omega_r$
- Le rapport de vitesse entre l'axe r et l'axe 1 est tel que : $\omega_r = -u_2\dot{\theta}$
- u_1 et u_2 sont sans dimensions
- Le moment d'inertie du rotor autour de l'axe m (supposé principal d'inertie) est I_m
- Le moment d'inertie de l'axe r du réducteur (supposé principal d'inertie) est I_r
- La liaison pivot du moteur, la linéaire annulaire et la rotule (entre 1 et 0) sont supposées parfaites
- Les engrenages du réducteur sont supposés parfaits
- Le moteur exerce un couple C_m sur l'axe m
- Le moteur-frein de l'axe 2 exerce un couple C_{m2} qui maintient le bras 2 aligné avec le bras 1 (tel que $\phi = 0$)



Le paramétrage géométrique est donné avant la première partie.

On connait le mouvement que l'on souhaite obtenir ($\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ sont connus).

Q7. (2 pt) Ecrire l'énergie cinétique E_c de l'ensemble S = {1, 2, r, m} dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen en faisant apparaitre comme seul paramètre cinématique θ et ses dérivées.

Q8. (2 pt) Déterminer la puissance $\mathcal{P}_{ext}$ développée par l'ensemble des forces extérieures au système S = {1, 2, r, m} en faisant apparaitre comme seul paramètre cinématique θ et ses dérivées.

Q9. (1 pt) Déterminer la puissance $\mathcal{P}_{int}$ développée par l'ensemble des efforts intérieurs au système S = {1, 2, r, m}.

Q10. (1 pt) Justifier le signe de C_m en fonction des résultats obtenus aux questions précédentes.

Q11. (1 pt) Ecrire le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système matériel S = {1, 2, r, m}. En déduire l'expression du couple C_m.

Formulaire

Torseur en un point A :

$$[T]_{A,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \vec{R} = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} & \vec{M}_A = \begin{vmatrix} L \\ M \\ N \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}_A \quad \text{avec } \vec{M}_{A[T]} = \vec{M}_{B[T]} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{[T]}$$

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$\left[C_{S/\mathcal{R}}\right] = \left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad , \quad \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})}\right]_A \text{ avec } \quad \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B\in S/\mathcal{R})} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}_{(A\in S_2/S_0)} = \vec{V}_{(A\in S_2/S_1)} + \vec{V}_{(A\in S_1/S_0)}$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\left[\mathrm{F}_{Ext/S}\right]_A = \left[\mathcal{D}_{(S/\mathcal{R})}\right]_A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{R}_{[\mathrm{F}_{ext}/S]} = m\,\vec{\Gamma}_{(G\in S/\mathcal{R})} \\ \vec{M}_{A[\mathrm{F}_{ext}/S]} = \vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} + m\,\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G\in S/\mathcal{R})}$$

où :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right]\,\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m\,\vec{AG} \wedge \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})} \quad \text{avec } A \in S$$

et

$$\left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ & \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm \\ & & \int_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

Théorème de Huygens

$$\left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right] = \left[I_{G,\mathcal{B}}(S)\right] + \left[I_{A,\mathcal{B}}(G,m(S))\right]$$

Puissance extérieure

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left[\vec{R}_{[F_{ext/S}]} \quad \vec{M}_{A[F_{ext/S}]}\right]_A \otimes \left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad \vec{V}_{(A\in S/\mathcal{R})}\right]_A$$

Energie cinétique

$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}m\vec{V}^2_{(G\in S/\mathcal{R})} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}.\left(\left[I_G(S)\right].\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right), \text{ si A est fixe, } \mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}.\left(\left[I_A(S)\right].\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)$$

$$E_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad \vec{V}_{P\in S/\mathcal{R}}\right]_P \otimes \left[\vec{Rc}(S/\mathcal{R}) \quad \vec{\sigma}_P(S/\mathcal{R})\right]_P \text{ pour un point quelconque}$$

Théorème de l'Energie Cinétique

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_{\Sigma/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{Ext\,\grave{a}\,\Sigma/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{Int\,\grave{a}\,\Sigma/\mathcal{R}}$$