Durée de l'épreuve 2h30 (3h20 avec TT)

On étudie la grue-portique ci-dessous (Figure 1). Cette grue-portique permet de charger un conteneur sur un navire de transport. Le conteneur (en bleu sur la photo) est retenu par des câbles enroulés sur un treuil fixé à un un chariot se déplaçant le long des poutres horizontales. Ce conteneur peut donc se déplacer verticalement et de droite à gauche. L'ensemble du portique peut se déplacer d'avant en arrière grâce aux roues situées en bas des montants verticaux. (Figure 1).

FIGURE 1 – Photo de la grue portique

Ce système étudié ici est composé de plusieurs parties (Figure 2) :

- Un portique 0 lié au repère $(O_0, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ considéré fixe pour notre étude (il n'existe pas de mouvement avant/arrière du portique par rapport au sol)
- Un chariot 1 lié à un repère $(B, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$:
  - Ce chariot 1 est en translation horizontale d'axe $\vec{x_1}$ par rapport au portique 0
  - Il présente une masse m_1 et son centre de gravité est le point E
- Deux roues arrière 2 (une seule est représentée) et deux roues avant 3 (une seule est représentée) :
  - Ces roues 2 et 3 sont en liaison pivot avec le chariot 1 d'axes respectifs $O_2\vec{z_0}$ et $O_3\vec{z_0}$
  - Les paramètres de rotation de 2 et 3 par rapport à 1 sont α_2 et α_3
  - La liaison pivot entre 1 et les roues avant 3 présente un couple de frottement de 3 sur 1 noté Cf
  - La liaison pivot entre 1 et les roues arrière 2 est parfaite
  - Les roues 2 et 3 sont en appui ponctuel avec frottement en I_2 et I_3 avec le portique
  - La masse des roues est négligée devant le reste des masses
  - Chaque paire de roues est un solide de révolution d'axe $\vec{z_0}$ et son moment d'inertie en $\vec{z_0}$ est noté I_r
- Les roues arrière 2 sont entraînées par un moteur 7 :
  - Le moteur 7 est en liaison pivot d'axe $O_7\vec{z_1}$ par rapport au chariot 1 (voir détail sur la figure 2)
  - Le moteur 7 tourne à une vitesse ω_m par rapport à 1
  - Un couple C_m s'exerce de 1 sur 7 autour de l'axe $\vec{z}$
  - Le moteur entraîne les roues arrière 2 à travers un engrenage parfait
  - Le moteur est de masse négligeable et son moment d'inertie autour de $\vec{z_0}$ (principal d'inertie) est I_m
  - Le rapport de réduction entre le moteur et les roues 2 est noté $u = -\omega_m/\dot{\alpha}_2$
- Deux câbles 4 et 5 (considérés comme des barres rigides quand le conteneur est en position basse) :
  - La barre 4 est liée à un repère $(B, \vec{x_b}, \vec{y_b}, \vec{z_b})$
  - Les barres 4 et 5 sont en liaison rotule parfaite avec le chariot 1 de centres B et A

- — L'angle entre chacune des barres et la verticale est noté θ (c'est le même pour chaque barre)
- — La masse et l'inertie des barres sont négligées devant le reste des masses et des inerties du système

— Un conteneur 6 lié à un repère $(G, \vec{x_6}, \vec{y_6}, \vec{z_6})$:

- — Le conteneur est en liaison rotule parfaite avec les barres en C et en D
- — Il présente une masse m_6 et son centre de gravité est le point G

Les autres paramètres géométriques sont les suivants :

- — Les roues sont de rayon R
- — La distance O_2E est égale à O_3E et est notée $3R$
- — La distance O_0E est telle que $\vec{O_0E} = x\vec{x_0} + h\vec{y_0}$
- — Les longueurs BC et AD (longueur des câbles en position basse) sont notées l
- — La longueur AB est égale à la longueur CD
- — Le conteneur 6 est modélisé par un carré de côté d
- — Le centre de gravité G est au centre du carré
- — Les roues roulent sans glisser au niveau des points de contact I_2 et I_3 avec le portique

Le problème est considéré plan.
Une attention particulière sera portée aux unités : tout résultat dont les unités ne sont pas cohérentes retirera des points à la question.

1 Étude générale du mécanisme

Question 1. *Graphe et nature des mouvements*

1. *Établir le graphe des liaisons et des efforts extérieurs. (Ajouter le bilan des inconnues de liaison si cela vous aide pour la suite)*
2. *Justifier la nature du mouvement du conteneur 6 par rapport au portique 0.*
3. *Donner l'expression des vecteurs rotation $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{4/0}$, $\vec{\Omega}_{5/0}$ et $\vec{\Omega}_{6/0}$.*
4. *Il existe un roulement sans glissement en I_2 et I_3. Que peut-on conclure sur la relation entre α_1 et α_2 ? Quelle est la relation entre $\dot{\alpha}_2$ et $\dot{x}$?*

Question 2. *Dynamique de 1/0*

1. *Calculer dans la base 1 le torseur dynamique au point E de 1 par rapport à 0.*
2. *Calculer dans la base 1 le torseur dynamique au point I_2 de 1 par rapport à 0.*

Question 3. *Dynamique de 6/0*

1. *Calculer dans la base $\mathcal{B}_b$ (associée à la barre) le torseur dynamique au point G du conteneur 6 dans son mouvement par rapport au repère 0.*

2 Partie énergétique

Pour faire un premier dimensionnement du moteur, on suppose dans un premier temps que le conteneur 6 est déplacé en position haute (câbles complètement enroulés). Contrairement à la première partie, l'ensemble $1, 4, 5, 6$ constitue un **solide unique noté 1'**.

Question 4. *Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble du système $S = 1', 2, 3, 7$ en fonction de $\dot{\alpha}_2$.*

Question 5. *Calculer la puissance des efforts extérieurs sur S.*

Question 6. *Calculer la puissance des efforts intérieurs à S.*

Question 7. *Déterminer le couple moteur C_m en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.*

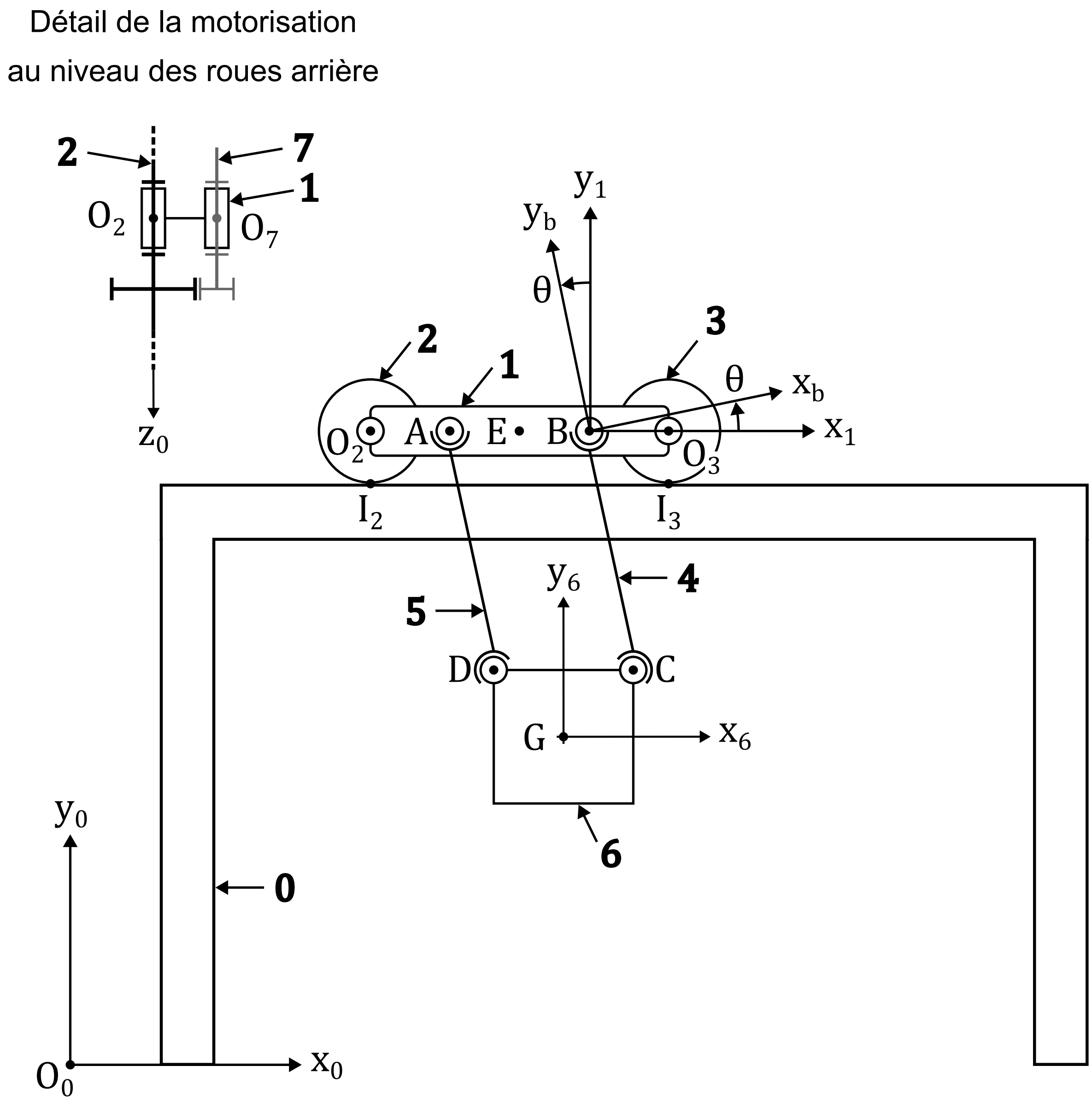

FIGURE 2 – Schéma cinématique

On suppose maintenant que le conteneur 6 est en position basse et **en mouvement par rapport à 1**. Il est donc libre de se déplacer comme en partie 1.

Question 8. *Déterminer l'énergie cinétique du conteneur 6 en fonction de x et θ ; en déduire la nouvelle énergie cinétique du système $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ en fonction de α_2, x et θ.*

Question 9. *Calculer la nouvelle puissance des efforts extérieurs au système en fonction de x et θ.*

On constate que dans ce cas, la puissance et l'énergie dépendent des paramètres de mouvement θ et x. Pour pouvoir résoudre le théorème de l'énergie cinétique il faut donc trouver un lien entre les deux paramètres de mouvement. C'est le but de l'étude dynamique de la partie suivante.

3 Étude dynamique

Le problème est considéré comme plan. On cherche à établir l'équation du mouvement des câbles (considérés ici comme des barres) et du conteneur en fonction de l'accélération du chariot.

Question 10. *Les barres 4 et 5 sont soumises chacune à deux forces (glisseurs). Comme les masses et inerties de 4 et 5 sont négligées, les torseurs dynamiques de 4/0 et 5/0 sont nuls ; 4 et 5 se comportent comme en statique. Quelle conclusion vous pouvez en tirer sur les efforts dans ces barres ? Faire un schéma des efforts sur chacune des barres en A, B, C et D.*

Question 11. *Ci-dessous, nous proposons plusieurs isolements permettant de déterminer les efforts dans les barres et de trouver un lien entre les paramètres de mouvement $\ddot{x}$ et $\ddot{\theta}$. Pour chacun de ces isolements, faites le bilan des inconnues et des équations associées et expliquer quel isolement vous semble le plus pertinent. On supposera que le paramètre x ainsi que $\dot{x}$ et $\ddot{x}$ sont connus.*

1. *Isolement de l'ensemble : chariot 1, paires de roues 2 et 3 et moteur 7.*
2. *Isolement du conteneur 6.*
3. *Isolement du chariot 1.*
4. *Isolement de tout le système : chariot 1, essieux 2 et 3, moteur 7, conteneur 6.*

Question 12. *Écrire les équations de la dynamique au centre de gravité pour l'isolement choisi dans la base $\mathcal{B}_b$. En déduire l'équation qui lie θ et $\ddot{\theta}$ à $\ddot{x}$ et aux données du problème. On ne résoudra pas les équations mais on se contentera de les poser.*

Question 13. *Aurait-on pu utiliser l'isolement de l'ensemble : bâti 0, chariot 1, paires de roues 2 et 3 et moteur 7 pour arriver au même résultat ? Justifier.*

Question 14. ***BONUS :*** *Expliquer comment le résultat de la partie dynamique pourrait être utilisé si l'on souhaite résoudre le théorème de l'énergie cinétique pour trouver le couple moteur en position basse.*

Formulaire

Dérivation vectorielle (d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}_k$) :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right\rfloor_0 = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right\rfloor_k + \vec{\Omega}\,(k/0) \wedge \vec{u}$$

Composition des vitesses :

$$\vec{V}_P\,(2/0) = \vec{V}_P\,(2/1) + \vec{V}_P\,(1/0)$$

Répartition des masses :

$$\left[I_{(P,\mathcal{B}_1)}\,(S)\right] = \left[I_{(G,\mathcal{B}_1)}\,(S)\right] + m \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}_{P,\mathcal{B}_1}$$

où x, y et z sont les coordonnées du vecteur $\vec{PG}$ dans la base $\mathcal{B}_1$

Moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_G\,(S/R) = \left[I_{(G,.)}\,(S)\right]\vec{\Omega}\,(S/R) \qquad \text{au centre d'inertie G du solide S}$$

$$\vec{\sigma}_P\,(S/R) = \left[I_{(P,.)}\,(S)\right]\vec{\Omega}\,(S/R) + m\vec{PG} \wedge \vec{V}_P\,(S/R) \qquad \text{en un point P quelconque du solide S}$$

Dans ces deux formules, le point signifie que les matrices seront écrites dans la base la plus appropriée.

Moment dynamique :

$$\vec{\delta}_G\,(S/R) = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_G\,(S/R)}{\mathrm{d}t}_{\rfloor R}$$ au centre d'inertie G du solide S

$$\vec{\delta}_P\,(S/R) = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_P\,(S/R)}{\mathrm{d}t}_{\rfloor R} + m\vec{V}_P\,(S/R) \wedge \vec{V}_G\,(S/R)$$ en un point P quelconque du solide S

Changement de point du moment (règle de BABAR) applicable **pour tous les torseurs** :

Moment au point B $=$ Moment au point A $+\ \overrightarrow{BA} \wedge$ Résultante

Torseurs utiles :

Torseur cinématique : $\begin{bmatrix} \vec{\Omega}\,(S/R) \\ \vec{V}_P\,(S/R) \end{bmatrix}_P$

Torseur cinétique : $\begin{bmatrix} \vec{R}_c\,(S/R) \\ \vec{\sigma}_P\,(S/R) \end{bmatrix}_P$

Torseur dynamique : $\begin{bmatrix} \vec{R}_d\,(S/R) \\ \vec{\delta}_P\,(S/R) \end{bmatrix}_P$

Torseur des efforts : $\begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_P(F) \end{bmatrix}_P$

Principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{R}_d\,(S_i/R) \\ \sum \vec{M}_P(F_{ext}) = \sum_i \vec{\delta}_P\,(S_i/R) \end{cases}$$

Énergie cinétique :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2}\{m\vec{V}_G\,(S/R)^2 + \vec{\Omega}\,(S/R) \cdot \left[I_{(G,.)}\,(S)\right] \vec{\Omega}\,(S/R)\}$$

Puissance :
La puissance est donnée par le comoment entre le torseur des efforts et le torseur cinématique.

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt}E_c(S/R) = P_{ext/S} + P_{int\,\grave{a}\,S}$$