Epreuve de mécanique (50 minutes)

Mardi 23 mars 2021

Les deux parties sont indépendantes. Le barème est donné à titre indicatif.

Notation : En l'absence de précisions spécifiques, la composante suivant $\vec{x}$ de l'effort de liaison au point P du solide i sur le solide j sera notée X_{Pij}, avec la même logique de notation pour les autres composantes.

Etude d'un hélicoptère :

L'ensemble tournant (2) appelé aussi rotor est constitué de la voilure et du rotor de turbine. Son centre d'inertie est noté G_2 et sa masse m_2. Il est en liaison pivot parfaite d'axe $(G_2, \overrightarrow{y_1})$ par rapport à la cellule de l'hélicoptère et tourne à vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ par rapport à 1. Il est également soumis aux actions de l'air sur les pales données par le torseur $\left[\vec{R}_a, C_{ay}\overrightarrow{y_1} + C_{az}\overrightarrow{z_1}\right]_{G_2,\mathcal{B}_1}$ et au couple moteur $C_m\overrightarrow{y_1}$ en G_2.

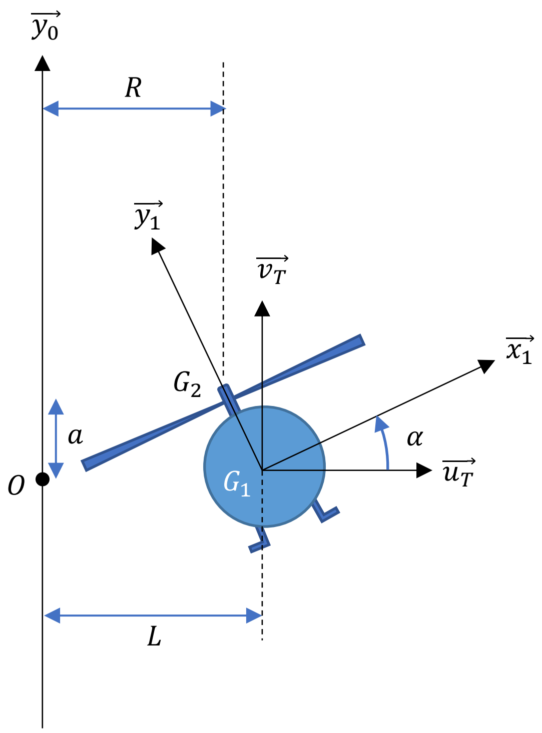
L'hélicoptère (1) est dans une phase de vol circulaire à altitude fixe. Il décrit un cercle d'axe $(O, \overrightarrow{y_0})$ tel que $\overrightarrow{y_0}$ est vertical à une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_0(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. Son centre d'inertie est noté G_1 et sa masse m_1. On définit un repère tournant $\mathcal{R}_T(\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{v_T}, \overrightarrow{w_T})$. Le solide (1) est également soumis aux actions de l'hélice de queue que l'on écrit de façon simplifiée $\left[F\overrightarrow{x_1}, \vec{0}\right]_{P,\mathcal{B}_1}$.

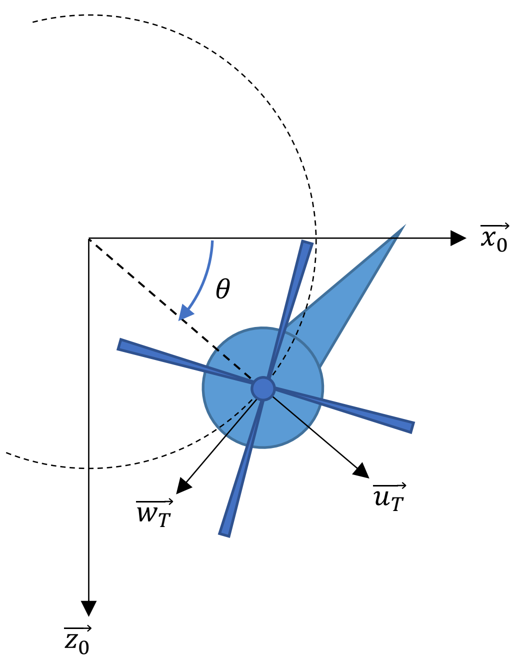
On pose $\overrightarrow{OG_2} = a\overrightarrow{y_0} + R\overrightarrow{u_T}$ et $\overrightarrow{OG_1} = L\overrightarrow{u_T}$.

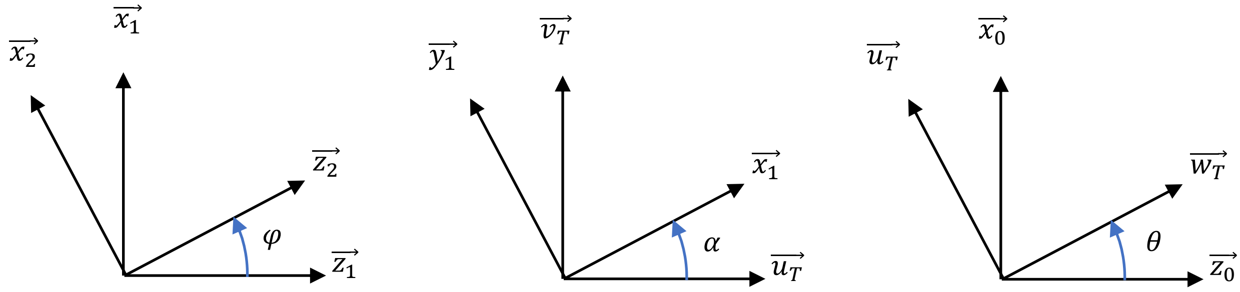
On peut observer que l'axe $(G_2, \overrightarrow{z_1})$ décrit un cône d'axe $(O, \overrightarrow{y_0})$ vertical et de demi-angle **fixe** au sommet $\alpha = cste = (\overrightarrow{v_T}, \overrightarrow{y_1}) = (\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{x_1})$. On définit le repère $\mathcal{R}_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ fixe par rapport au solide (1) et formant un angle α fixe autour de l'axe $\vec{v}$ avec R_T. Le repère $\mathcal{R}_2(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ est associé au rotor et tournant autour de $\overrightarrow{y_1}$.

L'opérateur d'inertie de l'hélicoptère dans la base $\mathcal{B}_1$ est de la forme : $\left[I_{G_1}(1)\right] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$

L'opérateur d'inertie du rotor <u>dans la même base $\mathcal{B}_1$</u> est noté : $\left[I_{G_2}(2)\right]_{\mathcal{B}_1}$







$$\varphi = (\vec{x_1},\vec{x_2}) = (\vec{z_1},\vec{z_2}), \alpha = (\vec{v_T},\vec{y_1}) = (\vec{u_T},\vec{x_1}), \theta = (\vec{x_0},\vec{u_T}) = (\vec{z_0},\vec{w_T})$$

Q1) Sachant que le solide (2) se comporte comme un solide de révolution d'axe $(G_2,\vec{y_1})$, donner la forme de la matrice d'inertie $[I_{G_2}(2)]$ dans la base $\mathcal{B}_1$. Pour la suite de l'étude, on utilisera la matrice proposée à cette question. **(2 points)**

Q1) Déterminer l'expression du torseur cinétique au point G_1 du solide (1). **(3 points)**

Q2) Déterminer l'expression du torseur dynamique au point G_1 du solide (1). **(3 points)**

Q3) Déterminer l'expression du torseur cinétique au point G_2 du solide (2). **(3,5 points)**

Q4) Déterminer l'expression du torseur dynamique au point G_2 du solide (2). **(3,5 points)**

Q5) Faire le bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur chacun des solides. **(3 points)**

Q6) On isole le solide {2} : écrire le théorème du moment dynamique au point G_2 en projection sur l'axe $\vec{z_1}$. **(1 point)**

Q7) Quelle est l'influence du couple C_m sur le solide {1} ? Quel impact a ce couple sur la direction de l'hélicoptère ? **(2 points)**

Q8) Bonus : quel est le rôle de l'hélice de queue dans ce contexte **(2 points)**

Formulaire :

Torseur en un point A :

$$[T]_{A,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \vec{R} = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} & \vec{M}_A = \begin{vmatrix} L \\ M \\ N \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}_A \qquad \text{avec } \vec{M}_{A[T]} = \vec{M}_{B[T]} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{[T]}$$

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$\left[C_{S/\mathcal{R}}\right] = \left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad , \quad \vec{V}(A \in S/\mathcal{R})\right]_A \text{ avec } \quad \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(B \in S/\mathcal{R}) + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}(A \in S_2 / S_0) = \vec{V}(A \in S_2 / S_1) + \vec{V}(A \in S_1 / S_0)$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\left[\mathrm{F}_{Ext/S}\right]_A = \left[\mathcal{D}(S/\mathcal{R})\right]_A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{R}_{[\mathrm{F_{ext}}/S]} = m\,\vec{\Gamma}(G \in S/\mathcal{R}) \\ \vec{M}_{A[\mathrm{F_{ext}}/S]} = \vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\delta}_A(S/\mathcal{R}) = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R})\right)_{\mathcal{R}} + m\,\vec{V}(A/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(G \in S/\mathcal{R})$$

où :

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right]\ \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m\ \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) \qquad \text{avec } A \in S$$

et

$$\left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ & \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm \\ & & \int_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

Théorème de Huygens

$$\left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right] = \left[I_{G,\mathcal{B}}(S)\right] + \left[I_{A,\mathcal{B}}(G,m(S))\right]$$

Puissance développée

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left[\vec{R}_{[F_{ext/S}]} \qquad \vec{M}_{A[F_{ext/S}]}\right]_A \cdot \left[\vec{\Omega}\,_{S/\mathcal{R}} \qquad \vec{V}(A \in S/\mathcal{R})\right]_A$$

Energie cinétique

$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G \in S/\mathcal{R}) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}.\left(\left[I_{G,}(S)\right].\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right), \text{ si A est fixe, } \mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}.\left(\left[I_A(S)\right].\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)$$

Théorème de l'Energie Cinétique

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_{\Sigma/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{Ext\,à\,\Sigma/_{\mathcal{R}}} + \mathcal{P}_{Int\,à\,\Sigma/_{\mathcal{R}}}$$