INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

Département Sciences et Technologies Pour l'Ingénieur

Pré-orientation Ingénierie de la Construction

EPREUVE DE MECANIQUE Module I3ICME11 (2h 00')

Aucun document personnel autorisé (formulaire fourni en annexe) Lors de la correction, la plus grande importance sera accordée à la clarté de la copie, la mise en valeur des résultats et à la justification des équations et des hypothèses. Pour l'écriture des composantes des vecteurs, l'étudiant choisira le repère de projection qui lui semble le plus adapté. Juin 2020

ETUDE D'UN ROTOR

L'étude proposée met en valeur le mouvement parasite créé par un défaut présent sur un rotor en rotation.

L'ensemble présenté sur la **figure 1** est constitué :

- du châssis (0) associée au repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est supposé Galiléen.
- du bras (1) associé au repère $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ avec $O\vec{G}_1 = l\,\vec{z}_0$ (l est constante). Il est en liaison pivot d'axe $O\,\vec{z}_1$ avec le châssis (0). Le paramètre d'orientation du bras par rapport au châssis est noté $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$. Le bras (1) de masse M_1, de centre d'inertie G_1 est tel que la matrice d'inertie en G_1 s'écrit $[I_{G_1,\mathcal{B}_1}(1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$.
- du rotor (2) associé au repère $\mathcal{R}_2 = (G_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et en liaison pivot d'axe $G_2\vec{x}_1$ avec le bras (1). Le moteur d'entrainement du rotor sera modélisé par un couple $C_{12}\ \vec{x}_1$. Le paramètre d'orientation du rotor par rapport au bras (1) est noté $\varphi = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$. On considèrera que le rotor tourne <u>à vitesse constante</u> : $\dot{\varphi} = cte$. Le rotor (2) de masse M_2, a un centre d'inertie G_2 avec $O\vec{G}_2 = L\,\vec{x}_1$ (L est constante). La matrice d'inertie en G_2 du rotor (2) s'écrit $[I_{G_2,\mathcal{B}_2}(2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}$
- d'un point matériel P de masse m lié à (2) qui modélise le défaut de fabrication sur le rotor. Sa position est définie par $O\vec{P} = d\ \vec{x}_1 + r\ \vec{y}_2$

Soit $\vec{g} = -g\,\vec{z}_0$ l'accélération de la pesanteur.

1) Faire les schémas des différents changements de base et déterminer les vecteurs rotations instantanés $\vec{\Omega}_{10}$ et $\vec{\Omega}_{20}$.

2) Après avoir précisé le système isolé, écrire l'équation du Principe Fondamental de la Dynamique qui permet de déterminer le couple du moteur d'entrainement du rotor C_{12} .

3) Pour mettre en évidence les effets parasites autour de l'axe z_1, on cherche à déterminer l'équation différentielle qui régit le mouvement du bras (1) par rapport au bâti (0). Exprimer grâce au PFD la variation de l'angle associé en fonction uniquement des données géométriques et massiques.

4) <u>Question indépendante :</u> retrouver cette équation en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

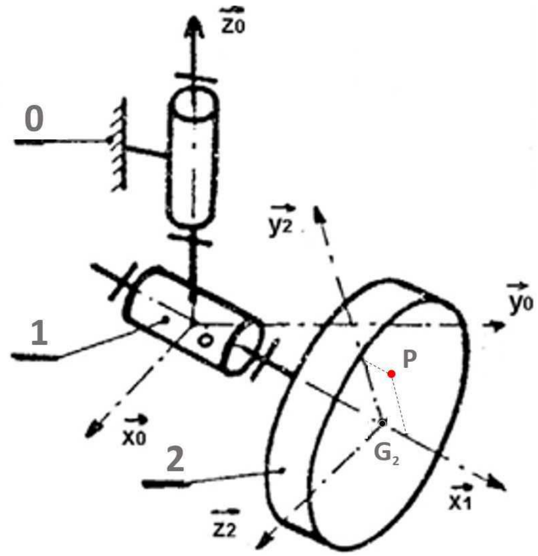

Figure 1

Formulaire Mécanique du Solide

Torseur en un point A :

$$[T]_{A,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \vec{R} = {}_{\mathcal{B}}\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} & \vec{M}_A = {}_{\mathcal{B}}\begin{vmatrix} L \\ M \\ N \end{vmatrix} \end{bmatrix}_A \quad \text{avec } \vec{M}_{A[T]} = \vec{M}_{B[T]} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{[T]}$$

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$\left[C_{S/\mathcal{R}}\right] = \left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad , \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}\right]_A \text{ avec } \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B \in S/\mathcal{R})} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}(A \in S_2 / S_0) = \vec{V}(A \in S_2 / S_1) + \vec{V}(A \in S_1 / S_0)$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left(\frac{d\,\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\,\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\left[\mathrm{F}_{Ext/S}\right]_A = \left[\mathcal{D}_{(S/\mathcal{R})}\right]_A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{R}_{[\mathrm{F}_{ext}/S]} = m\,\vec{\Gamma}_{(G \in S/\mathcal{R})} \\ \vec{M}_{A[\mathrm{F}_{ext}/S]} = \vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} + m\,\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})}$$

où :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right]\ \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m\ \vec{AG} \wedge \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \qquad \text{avec } A \in S$$

et

$$\left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ & \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm \\ & & \int_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

Théorème de Huygens

$$\left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right] = \left[I_{G,\mathcal{B}}(S)\right] + \left[I_{A,\mathcal{B}}(G,m(S))\right]$$

Puissance développée

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left[\vec{R}_{[F_{ext/S}]} \quad \vec{M}_{A[F_{ext/S}]}\right]_A \cdot \left[\vec{\Omega}\,{}_{S/\mathcal{R}} \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}\right]_A$$

Energie cinétique

$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m\vec{V}^2_{(G \in S/\mathcal{R})} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \left(\left[I_{G,.}(S)\right].\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right), \text{ si A est fixe, } \mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \left(\left[I_A(S)\right].\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)$$

Théorème de l'Energie Cinétique

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_{\Sigma/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{Ext\,\grave{a}\,\Sigma/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{Int\,\grave{a}\,\Sigma/\mathcal{R}}$$

En tout point autre que G ou un point fixe, l'énergie cinétique est le comoment des torseurs cinétique et cinématique du solide