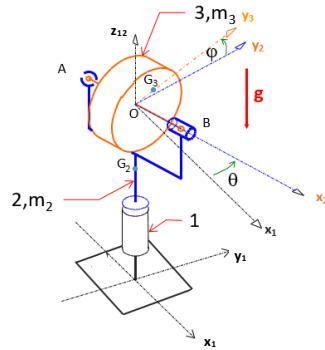


EPREUVE DE MECANIQUE Module I2ICME11 (1h30)

Aucun document personnel autorisé (formulaire fourni en annexe) Lors de la correction, la plus grande importance sera accordée à la clarté de la copie, la mise en valeur des résultats et à la justification des équations et des hypothèses. Pour l'écriture des composantes des vecteurs, l'étudiant choisira le repère de projection qui lui semble le plus adapté. Mars 2019

ETUDE D'UN GYROSCOPE

Le dispositif représenté ci-dessous permet d'illustrer l'effet du couple gyroscopique.



Le dispositif expérimental représenté sur la figure ci-dessus est constitué :

- du socle 1 immobile, considéré comme le bâti fixe
- de la fourche 2, en liaison pivot parfaite d'axe $(O \vec{z}_1)$ par rapport au socle 1. Le paramètre de position de 2/1 est l'angle θ . La fourche 2 est entraînée par un moteur qui impose une vitesse de rotation constante $\dot{\theta} = w_{21}$.
- d'un rotor 3, en liaison pivot parfaite par rapport à la fourche 2, liaison réalisée par deux liaisons combinées : une liaison sphère/sphère en A et une liaison sphère/cylindre en B d'axe $(B \vec{x}_2)$. Le paramètre de position de 3/2 est l'angle ϕ . Le rotor 3 est entraîné par un moteur qui impose une vitesse de rotation constante $\dot{\phi} = w_{32}$. Le centre de gravité G_3 de 3 est tel que $\vec{OG}_3 = e \vec{y}_3$. La masse de 3 est notée m . Les matrices d'inertie en G_3 et en O sont notées :

$$[I_{G_3, \mathcal{B}_3}(\mathbf{3})] = \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [I_{O, \mathcal{B}_3}(\mathbf{3})] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

On pose : $\vec{AO} = \vec{OB} = d \vec{x}_{23}$

- Faire le graphe des liaisons complet de ce mécanisme.
- Dessiner les repères de changement de base qui font passer de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}_2 et de \mathcal{B}_2 à \mathcal{B}_3 .

- Le rotor a été modélisé sur un logiciel de CAO et les informations inertielles sont données dans le tableau ci-dessous :

VOLUME = 1.8427459e+04 MM³
SUPERFICIE = 5.6753618e+03 MM²
MASSE VOLUMIQUE = 8.8508866e-09 KILOGRAMME / MM³
MASSE = 1.6309935e-04 KILOGRAMME

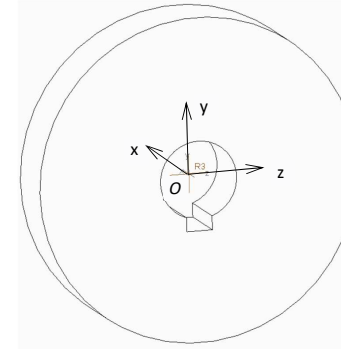
CENTRE DE GRAVITE relatif au repère R3 :
X Y Z 0.0000000e+00 2.8406755e-02 0.0000000e+00 MM

INERTIE relative au repère R3 : (KILOGRAMME * MM²)

TENSEUR D'INERTIE :
bx bx bz 5.4095327e-02 0.0000000e+00 0.0000000e+00
lyx ly y lyz 0.0000000e+00 2.8422290e-02 0.0000000e+00
lz x lz y lzz 0.0000000e+00 0.0000000e+00 2.8391359e-02

INERTIE au CENTRE DE GRAVITE relative au repère R3 : (KILOGRAMME * MM²)

TENSEUR D'INERTIE :
bx bx bz 5.4095196e-02 0.0000000e+00 0.0000000e+00
lyx ly y lyz 0.0000000e+00 2.8422290e-02 0.0000000e+00
lz x lz y lzz 0.0000000e+00 0.0000000e+00 2.8391228e-02



- Donner la valeur de e à partir des données du tableau ci-dessus, puis expliquer pourquoi le centre de gravité est décalé positivement dans la direction (Oy) du repère R : $(Oxyz)$ de la figure ci-dessus.
- Expliquer pourquoi les axes (Ox) et (Oz) sont des axes principaux d'inertie en O ?
- Donner les valeurs de a_3 , b_3 et c_3 à partir des données du tableau, puis celles de A_3 , B_3 et C_3 . Donner l'expression de la matrice d'inertie qui permet de retrouver $[I_{O, \mathcal{B}_3}(\mathbf{3})]$ à partir de $[I_{G_3, \mathcal{B}_3}(\mathbf{3})]$. Faire l'application numérique qui montre comment obtenir A_3 à partir de a_3 .

On rappelle l'hypothèse sur les vitesses de rotation : $\dot{\theta} = w_{21} = cte$ et $\dot{\phi} = w_{32} = cte$.

- Déterminer le torseur cinématique du solide 3 dans son mouvement par rapport au bâti 1 réduit au point O et en projection dans la base \mathcal{B}_3 .
- Déterminer le torseur cinétique du solide 3 dans son mouvement par rapport bâti 1 réduit au point O et en projection dans la base \mathcal{B}_3 .
- Déterminer le torseur dynamique du solide 3 dans son mouvement par rapport bâti 1 réduit au point O et en projection dans la base \mathcal{B}_3 .

Le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au solide **3** donne le torseur suivant :

$$[F_{ext}/\mathbf{3}] = \left[\begin{array}{l} X_A \\ Y_A + Y_B - mg \sin\varphi \\ Z_A + Z_B - mg \cos\varphi \end{array} ; \begin{array}{l} L_A - mg e \cos\varphi \\ d(Z_A - Z_B) \\ -d(Y_A - Y_B) \end{array} \right]_{O, \mathcal{B}_3}$$

Où X_A, Y_A, Z_A et L_A sont les efforts introduits par la liaison en A et le moteur, en projection dans \mathcal{B}_3 et Y_B, Z_B sont les efforts introduits par la liaison en B en projection dans \mathcal{B}_3 .

7. Déterminer l'expression de Y_A en fonction de $m, g, d, e, \varphi, A_3, B_3, C_3, w_{21}, w_{32}$ et φ .
Donner la partie de Y_A qui est induite par la présence d'un défaut géométrique, et celle qui est induite par un phénomène de dynamique (appelé dans ce cas couple gyroscopique).

Formulaire

Torseur en un point \mathcal{A} : $[T]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \left[\begin{array}{l} \vec{R} = \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \\ \vec{M}_A = \begin{array}{l} L \\ M \\ N \end{array} \end{array} \right]_{\mathcal{B}} \quad \text{avec} \quad \vec{M}_A[T] = \vec{M}_B[T] + A\vec{B} \wedge \vec{R}[T]$

Torseur cinématique en un point \mathcal{A} du mouvement d'un solide rigide :

$$[C_{S/\mathcal{R}}] = [\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}]_{\mathcal{A}}, \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B \in S/\mathcal{R})} + A\vec{B} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de composition des vitesses : $\vec{V}_{(A \in S_2/S_0)} = \vec{V}_{(A \in S_2/S_1)} + \vec{V}_{(A \in S_1/S_0)}$

Relation de dérivation dans une base mobile : $\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$

Principe Fondamental de la Dynamique : $[F_{Ext/S}]_A = [D_{(S/\mathcal{R})}]_A \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{[F_{Ext/S}]} = m \vec{\Gamma}_{(G \in S/\mathcal{R})} \\ \vec{M}_{A[F_{Ext/S}]} = \vec{\delta}_A^{(S/\mathcal{R})} \end{cases}$

avec : $\vec{\delta}_A^{(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A^{(S/\mathcal{R})} \right)_{\mathcal{R}} + m \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})}$

où : $\vec{\sigma}_A^{(S/\mathcal{R})} = [I_{A,\mathcal{B}}(S)] \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m A\vec{G} \wedge \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \quad \text{avec} \quad A \in S$

$$\text{et } [I_{A,\mathcal{B}}(S)] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ & \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm \\ & & \int_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix} \quad \text{Théorème de Huygens} \quad [I_{A,\mathcal{B}}(S)] = [I_{G,\mathcal{B}}(S)] + [I_{A,\mathcal{B}}(G,m(S))]$$