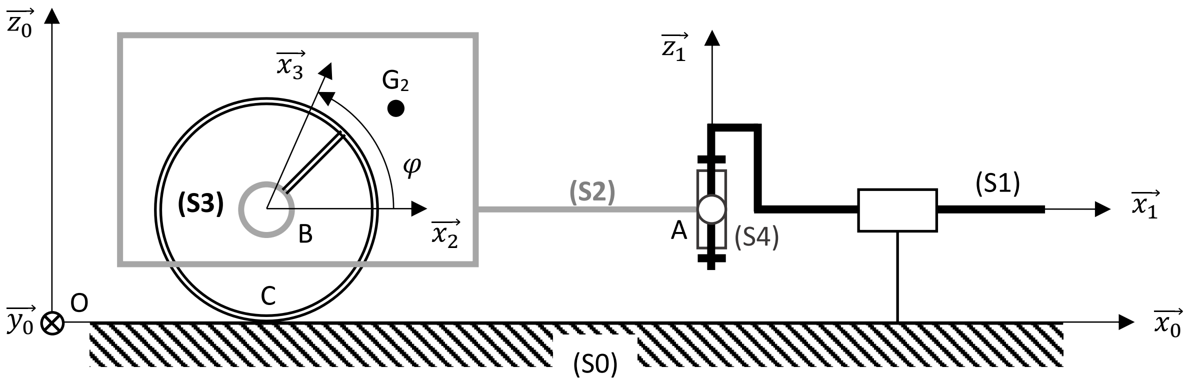
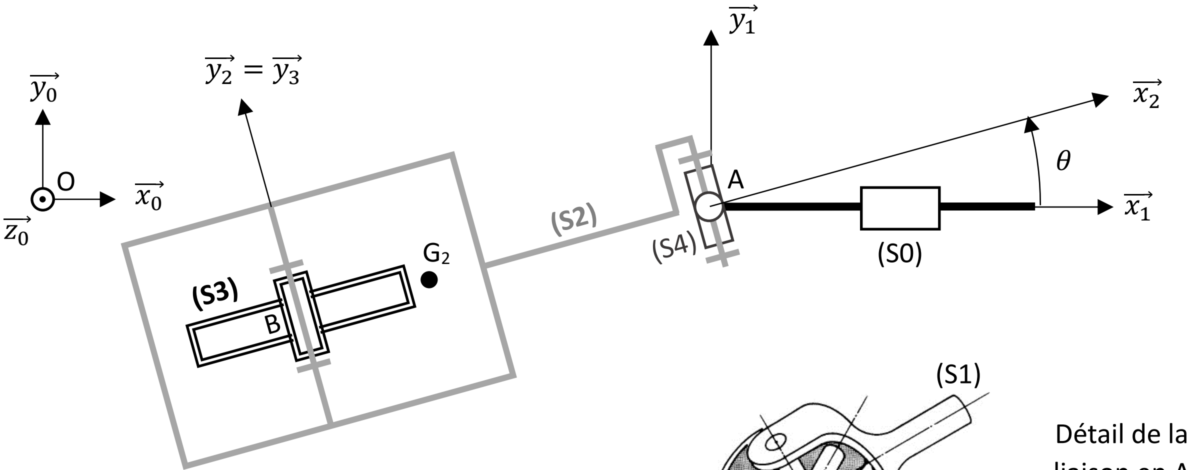
Remorque mono-roue

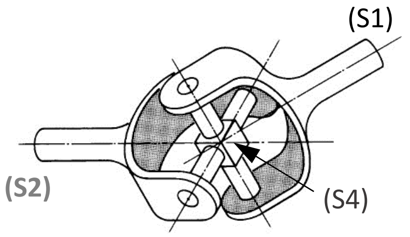
Pour concevoir des systèmes tels que les trains d'atterrissage des petits avions ou les remorques à bagages de moto, il est nécessaire de déterminer :

- les efforts sur le pneu arrière (de la remorque ou du train d'atterrissage de l'avion),
- la nature des mouvements parasites (oscillation de la remorque autour de son point d'attache) qui peuvent survenir quand le système tracté possède une seule roue.

Nous allons étudier une remorque à bagages attachée à une moto par un joint de cardan (voir figure ci-dessous). Cette attache permet le passage d'un dos d'âne ou d'un trou sans décollement de la roue arrière et permet aussi un angle entre la remorque et la moto dans un virage. Cependant, elle assure que la remorque ne tombe pas sur le côté en bloquant sa rotation autour de l'axe $\overrightarrow{x_2}$ (les deux autres rotations sont permises). Nous étudierons la rotation de la remorque autour de l'axe $\overrightarrow{z_1}$ mais pas sa rotation autour de $\overrightarrow{y_2}$ (angle nul si le sol est plat).







Détail de la liaison en A (forme des pièces en 3D)

Le système est constitué de 5 solides :

- Le sol horizontal fixe (S0) correspond au plan $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$
- Un véhicule (S1) se déplace en ligne droite dans la direction $\overrightarrow{x_0}$
- (S1) tracte une remorque (à une roue) accrochée en A modélisée par un ensemble de 2 solides :
  - le corps de la remorque et son chargement (S2)
  - la roue (S3) qui supporte la remorque
- La remorque est attachée à la moto par un joint de cardan qui comprend un solide intermédiaire (S4) appelé « croisillon ».

Caractéristiques du système :

- B est le centre de la roue et son centre de gravité
- C est le point de contact de la roue avec le sol
- G2 désigne le centre de masse de (S2)
- $\overrightarrow{z_0}$ est l'axe vertical ascendant
- $\vec{g} = -g\overrightarrow{z_0}$ donne l'intensité de la gravité
- $\mathcal{R}_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}) = (O, \mathcal{B}_0)$ est le repère lié à la terre, considéré comme galiléen (ou « absolu »)
- $\mathcal{R}_2(B, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}) = (B, \mathcal{B}_2)$ est le repère lié à (S2)
- $\mathcal{R}_3(B, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3}) = (B, \mathcal{B}_3)$ est le repère lié à (S3)
- L'axe de la roue est $(B, \overrightarrow{y_2})$
- $\overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{y_3}$ et $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}$

Paramétrage et géométrie :

- Le point A de l'arrière du véhicule se déplace parallèlement à $(O, \overrightarrow{x_0})$ avec une vitesse **constante** v
- R est le rayon de la roue
- Les coordonnées du point A sont : $\overrightarrow{OA} = x(t).\overrightarrow{x_0} + R \cdot \overrightarrow{z_0}$
- B est lié à (S2) et le vecteur BA est horizontal
- $\overrightarrow{BA} = l.\overrightarrow{x_2}$
- $\overrightarrow{BG_2} = a.\overrightarrow{x_2}$ + c $\overrightarrow{z_2}$
- $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2})$ est l'angle d'oscillation parasite de la remorque autour de $(A, \overrightarrow{z_0})$
- $\varphi = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$ est l'angle de rotation de la roue autour de son axe $(B, \overrightarrow{y_3})$

Données de masse et d'inertie :

- La masse de (S2) est M
- La masse de (S3) est m
- La matrice d'inertie en G2 du solide (S2) dans la base $\mathcal{B}_2$ est notée :

$$[I_{G2}(S_2)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

- La matrice d'inertie en B du solide (S3) dans la base $\mathcal{B}_3$ est notée :

$$[I_B(S_3)] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 2I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_3}$$ où I est une constante positive

- La masse et l'inertie du solide (S4) sont négligeables devant celles du reste du système

Liaisons et actions de liaison :

- Une glissière modélise la translation du solide (S1), **<u>cette liaison n'est pas réelle et ne sera pas étudiée</u>**
- La liaison en A entre (S1) et (S4) est un pivot d'axe $\overrightarrow{z_1}$ (paramètre θ)
- La liaison en A entre (S4) et (S2) est un pivot d'axe $\overrightarrow{y_2}$ (pas de rotation quand le sol est plat)
- La liaison en B est une liaison pivot d'axe $\overrightarrow{y_3}$ (paramètre φ)
- La liaison en C est une liaison ponctuelle de normale $(C, \overrightarrow{z_1})$

Calcul des torseurs dynamiques

Question 0 : Réaliser le graphe d'analyse du système

Question 1 : Déterminer les composantes dans la base $\mathcal{B}_2$ des accélérations par rapport à 0 des points B et G_2.

Question 2 : Expliquer pourquoi la matrice d'inertie du solide (S3) ne change pas si on la calcule dans la base $\mathcal{B}_2$.

Déterminer les composantes du moment dynamique en B du solide (S3) dans la base $\mathcal{B}_2$.

Déterminer les composantes du moment dynamique en A du solide (S3) dans la base $\mathcal{B}_2$.

Question 3 : Déterminer les composantes du moment dynamique en G_2 du solide (S2).

Déterminer les composantes du moment dynamique en A du solide (S2) dans la base $\mathcal{B}_2$.

Principe fondamental de la dynamique

Données :

- Le mouvement de la moto est connu
- On rappelle que la vitesse du point A est : $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = v\overrightarrow{x_0}$, où v est une constante positive connue.
- La roue (S3) roule sans glisser sur le sol.
- On considère comme parfaites les liaisons en A et B.
- Le torseur de liaison entre le point de contact de la roue et le sol en C dans $\mathcal{B}_2$ est :

$$\{\tau_{01}\} = \underset{\mathcal{B}_2}{\begin{Bmatrix} T_x & 0 \\ T_y & 0 \\ N & -k\theta \end{Bmatrix}_C} \quad \text{où } k \text{ est une raideur de torsion connue}$$

- Notation : on écrira le torseur des actions mécaniques de (Si) sur (Sj) au point P :

$$\{\tau_{ij}\} = \underset{\mathcal{B}_{i\,ou\,j}}{\begin{Bmatrix} X_{Pij} & L_{Pij} \\ Y_{Pij} & M_{Pij} \\ Z_{Pij} & N_{Pij} \end{Bmatrix}_P}$$

On souhaite déterminer les 3 inconnues de liaison $\boldsymbol{T_x}$, $\boldsymbol{T_y}$ et $\boldsymbol{N}$ en fonction des paramètres du mouvement et des données, **aucune autre inconnue d'effort** ne doit apparaitre dans les équations.

Question 4 : Isoler le solide (S3) et écrire l'unique équation du PFD qui répond à l'objectif ci-dessus.

La question 4 donne une équation pour 3 inconnues d'efforts (T_x, T_y et N). Il nous manque donc **2 équations supplémentaires** pour déterminer les efforts en C en fonction des données et des paramètres du mouvement.

Question 5 : Identifier les 2 isolements pour lesquels une équation du PFD fait intervenir uniquement les inconnues d'effort situées au point C (et aucune autre inconnue d'effort). Ecrire les 2 équations utiles identifiées (une pour chaque isolement). On posera seulement les équations sans les résoudre.

Question 6 : Ecrire la condition de roulement sans glissement en C. En déduire 2 équations supplémentaires associées à notre problème.

Question 7 : A partir des résultats des questions 5, 6 et 7 faire le bilan global des équations posées et des inconnues associées à ces équations. Expliquer comment les 5 équations identifiées permettent de résoudre complètement le problème.

Formulaire

Torseur en un point A :

$$[T]_{A,\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} \vec{R} = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} & \vec{M}_A = \begin{vmatrix} L \\ M \\ N \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} \end{Bmatrix}_A \quad \text{avec } \vec{M}_{A[T]} = \vec{M}_{B[T]} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{[T]}$$

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$\left[C_{S/\mathcal{R}}\right] = \left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad , \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}\right]_A \text{ avec } \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B \in S/\mathcal{R})} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}(A \in S_2 / S_0) = \vec{V}(A \in S_2 / S_1) + \vec{V}(A \in S_1 / S_0)$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\left[\mathrm{F}_{Ext/S}\right]_A = \left[\mathcal{D}_{(S/\mathcal{R})}\right]_A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{R}_{[\mathrm{F_{ext}}/S]} = m\,\vec{\Gamma}_{(G \in S/\mathcal{R})} \\ \vec{M}_{A[\mathrm{F_{ext}}/S]} = \vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})}\right)_{\mathcal{R}} + m\,\vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})}$$

où :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = \left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right]\ \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m\ \vec{AG} \wedge \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \qquad \text{avec } A \in S$$

et

$$\left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ & \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm \\ & & \int_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

Théorème de Huygens

$$\left[I_{A,\mathcal{B}}(S)\right] = \left[I_{G,\mathcal{B}}(S)\right] + \left[I_{A,\mathcal{B}}(G, m(S))\right]$$

Puissance développée

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left[\vec{R}_{[F_{ext/S}]} \quad \vec{M}_{A[F_{ext/S}]}\right]_A \otimes \left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}\right]_A$$

Energie cinétique

$$\mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m \vec{V}^2_{(G \in S/\mathcal{R})} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \left(\left[I_{G,}(S)\right].\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right), \text{ si A est fixe, } \mathcal{E}_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \cdot \left(\left[I_A(S)\right].\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}\right)$$

$$E_{S/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\left[\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad \vec{V}_{P \in S/\mathcal{R}}\right]_P \otimes \left[\vec{Rc}(S/\mathcal{R}) \quad \vec{\sigma}_P(S/\mathcal{R})\right]_P \text{ pour un point quelconque}$$

Théorème de l'Energie Cinétique

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_{\Sigma/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{Ext\,\grave{a}\,\Sigma/_{\mathcal{R}}} + \mathcal{P}_{Int\,\grave{a}\,\Sigma/_{\mathcal{R}}}$$